Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 1

Obligatoriske oppgaver

Lay, avsnitt 6.3

5. Verifiser at $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er en ortogonal mengde, deretter finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y}$ på $\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

12. Finn det nærmeste punktet til $\mathbf{y}$ i underrommet W utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_1$.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Lay, avsnitt 6.4

3. Mengden under er en basis for er underrom W. Bruk Gram-Schmidt prosessen for å produsere en ortogonal basis for W.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

9. Finn en ortogonal basis for kolonnerommet til den følgende matrisen.

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

13. Kolonnene til Q ble til ved å bruke Gram-Schmidt på kolonnene til A. Finn en øvre-triangulær matrise R slik at $A = QR$. Verifiser arbeidet ditt.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Lay, avsnitt 6.5

3. Finn en minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved å **(a)** konstruere den normale ligningen for $\hat{\mathbf{x}}$ og **(b)** og løse for $\hat{\mathbf{x}}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7. Finn kvadratavviket for den minste kvadraters løsningen du fant i oppgave **3.**

11. Finn **(a)** den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ på Col$A$ og **(b)** en minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lay, avsnitt 6.6

3. Finn ligningen $y = \beta_0 + \beta_1 x$ for den minste kvadraters linjen som passer best for de gitte datapunktene.

$$(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 4)$$

Lay, avsnitt 7.1

13. Ortogonalt diagonaliser matrisen under, som gir en ortogonal matrise P og en diagonalmatrise D.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

19. Ortogonalt diagonaliser matrisen under, som gir en ortogonal matrise P og en diagonalmatrise D. Matrisen har eigenverdiene $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 7$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Lay, avsnitt 7.2

3. Finn matrisen som har kvadratisk form. Anta at $\mathbf{x}$ er i $\mathbb{R}^2$.

(a) $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$

(b) $3x_1^2 + 2x_1x_2$

Eksamen vår 2004

Oppgave 7. Vis generelt at hvis *alle* egenverdiene til en symmetrisk $n \times n$ matrise A er positive ($\lambda > 0$), så er $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ for alle vektorer $x \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$.

Eksamen vår 2006

Oppgave 4. *Svar uten begrunnelse ved å velge ett alternativ. Riktig svar: full score, galt svar: null score.*

(a) Bestem minste kvadraters løsning $(\bar{x}, \bar{y})$ for ligningssystemet.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ x - y &= 1 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

A : $(0, 1)$ **B** : $(1/2, 3/2)$ **C** : $(1, 1)$ **D** : $(3/2, 1/2)$

(b) For hvilke reelle tall α, β er P en ortogonal matrise med determinant lik 1?

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha & -1 & -1 & \beta \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \beta \end{bmatrix}$$

A : $\alpha = 2, \beta = 0$ **B** : $\alpha = 1, \beta = -1$ **C** : $\alpha = -1, \beta = 1$ **D** : $\alpha = 0, \beta = 2$

Valgfrie oppgaver

Lay, avsnitt 6.3

23. La A være en $m \times n$ matrise. Vis at hver vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ kan skrives på formen $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{u}$, hvor $\mathbf{p}$ er i Row$A$ og $\mathbf{u}$ er i Nul$A$. Vis så at hvis ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent, så finnes det en unik $\mathbf{p}$ i Row$A$ slik at $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$.

Lay, avsnitt 6.4

19. Anta $A = QR$, hvor Q er $m \times n$ og R er $n \times n$. Vis at hvis kolonnene i A er lineært uavhengig, så må R være invertibel. (*Hint:* Studer ligningen $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og bruk at $A = QR$).

Lay, avsnitt 6.6

9. Et eksperiment produserte datapunktene $(1, 7.9), (2, 5.4)$ og $(3, -9)$. Beskriv modellen som produserer en miste kvadraters løsning for disse punktene ved å bruke en funksjon på form

$$y = A \cos x + B \sin x.$$

Lay, avsnitt 7.1

24. La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Verifiser at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er eigenvektorer til A. Ortogonalt diagonaliser A.

27. Vis at hvis A er en $n \times n$ symmetrisk matrise, da vil $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$.

Lay, avsnitt 7.2

9. Klassifiser den kvadratiske formen. Gjør så en endring av variabler, $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, som transformerer den kvadratiske formen til en som har ingen kryssprodukt termer. Skriv den nye kvadratiske formen. Konstruer P ved å bruke metoder fra avsnitt 7.1.

$$4x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$$