LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I FAG TMA4120 MATEMATIKK 4K

Fredag 19. desember 2003

Oppgave 1 Taylorrekka kan finnes ved bruk av geometrisk rekke.

$$f(z) = \frac{z^{2003}}{z^{2004}-1} = -z^{2003}\left(\frac{1}{1-z^{2004}}\right) = -z^{2003}\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{2004}\right)^n = \underline{-\sum_{n=0}^{\infty} z^{2004n+2003}}.$$

Den geometriske rekka som brukes konvergerer for $|z^{2004}| < 1$, dvs. for $|z| < 1$. Følgelig blir konvergensradien til Taylorrekka $\underline{R = 1}$.

Oppgave 2 Laplacetransformasjon av problemet gir

$$\begin{aligned}
\left(s^2+2\right)Y(s) &= \frac{e^{-s}}{s^2} \\
Y(s) &= e^{-s}\left(\frac{1}{s^2(s^2+2)}\right) \\
&= e^{-s}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+2)}\right) \\
&= e^{-s}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s^2+2)}\right).
\end{aligned}$$

Invers Laplacetransformasjon gir følgelig at

$$y(t) = \underline{\frac{1}{2}(t-1)u(t-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin[\sqrt{2}\,(t-1)]u(t-1)}.$$

Oppgave 3 Sett inn $u(x,t) = X(x)T(t)$ i differensiallikninga som gir

$$XT_t + XT = X_{xx}T.$$

Separerer variablene

$$\frac{T_t}{T} + 1 = \frac{X_{xx}}{X} = k,$$

altså

$$\frac{T_t}{T} = k - 1$$
$$\frac{X_{xx}}{X} = k.$$

Løsningen for $X(x)$ er gitt ved

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x}.$$

Randkravet at $X(0) = X(\pi) = 0$ gir bare ikke-triviell løsning for $k = -p^2 < 0$m slik at

$$X(x) = a\cos px + b\sin px.$$

For å oppfylle randkravene, må $a = 0$ og $p = n$, der n er et helt tall større enn null. Negative n gir lovlige løsninger, men ikke noen nye løsninger, siden $\sin(-x) = -\sin(x)$.

$$X(x) = b\sin(nx).$$

Vi finner så løsningen for $T(t)$. Siden k er den samme for begge likningene får vi at

$$T(t) = ce^{-(n^2+1)t}.$$

Alle løsninger $u(x,t) = X(x)T(t)$ er dermed gitt ved

$$u_n(x,t) = \underline{b_n \sin(nx)e^{-(n^2+1)t}},$$

der n er et vilkårlig positivt heltall ($n = 0$ gir den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$).

Superposisjonsprinsippet gir at

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)e^{-(n^2+1)t}$$

er en løsning. Initsialbetingelsen er tilfredsstilt dersom

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}.$$

Dette krever at b_n velges som Fourierkoeffisientene til den odde periodiske utvidelsen av initsialbetingelsen. Disse finnes ved

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx dx \\
&= \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{x}{\pi n}\cos nx + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx dx \\
&= -\frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{\pi n^2}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin nx \\
&= -\frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

For n like vil $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$, og for n odde vil $\cos\frac{n\pi}{2} = 0$. Følgelig har vi at

$$
b_n = \begin{cases} -(-1)^k\frac{1}{2k} & \text{for } n = 2k \\ (-1)^k\frac{2}{\pi(2k+1)^2} & \text{for } n = 2k+1 \end{cases}.
$$

Dermed blir

$$
u(x,t) = \underline{-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k}\sin(2kx)e^{-((2k)^2+1)t} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{\pi(2k+1)^2}\sin((2k+1)x)e^{-((2k+1)^2+1)t}}.
$$

Oppgave 4 Vi ser at singularitetene til funksjonen $f(z)$ er gitt ved

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$
$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Dermed er

$$f(z) = \frac{e^{3iz}}{z^2+2z+5} = \frac{e^{3iz}}{(z-(-1+2i))(z-(-1-2i))}.$$

Av disse singularitetene er det $-1+2i$ som ligger i øvre halvplan. Residuet beregnes følgelig

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=-1+2i} &= \frac{e^{3i(-1+2i)}}{(-1+2i-(-1-2i))} = \frac{e^{-3-6i}}{4i} \\
&= \frac{e^{-6}\left(\cos(-3) + i\sin(-3)\right)}{4i} = -i\frac{e^{-6}\left(\cos(3) - i\sin(3)\right)}{4} \\
&= \underline{-\frac{e^{-6}}{4}\left(\sin(3) + i\cos(3)\right).}
\end{aligned}$$

Vi beregner så inregralet

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2+2x+5}dx &= \operatorname{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{x^2+2x+5}dx\right\} \\
&= \operatorname{Im}\left\{2\pi i\left[-\frac{e^{-6}}{4}\left(\sin(3) + i\cos(3)\right)\right]\right\} \\
&= \underline{\frac{-e^{-6}\pi\sin(3)}{2}}.
\end{aligned}$$

Oppgave 5 Siden funksjonen er kontinuerlig og periodisk for positive t, så vil den også måtte tilfredsstille betingelsene for at Laplacetransformasjonen skal eksistere. Følgelig er integralet på venstre side veldefinert, og vi kan skrive

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt &= \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} e^{-st}f(t)dt = \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 e^{-s(t+n)}f(t+n)dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 e^{-sn}e^{-st}f(t)dt = \sum_{n=0}^\infty e^{-sn}\int_0^1 e^{-st}f(t)dt \\
&= \int_0^1 e^{-st}f(t)dt \sum_{n=0}^\infty \left(e^{-s}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^{-st}f(t)dt \\
&= \underline{\frac{e^s}{e^s-1}\int_0^1 e^{-st}f(t)dt.}
\end{aligned}$$

Alternativt kan vi si at

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)e^{-st}dt &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - \int_1^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - \int_0^\infty f(t+1)e^{-s(t+1)}dt \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - e^{-s}\int_0^\infty f(t+1)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - e^{-s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \big(1-e^{-s}\big)\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.
\end{aligned}$$

Dermed følger direkte at

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt &= \frac{1}{(1-e^{-s})}\int_0^1 f(t)e^{-st}dt \\
&= \underline{\frac{e^s}{(e^s-1)}\int_0^1 f(t)e^{-st}dt.}
\end{aligned}$$