Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen:
Trond Varslot 7359 1650

EKSAMEN I FAG TMA4120 MATEMATIKK 4K

Nynorsk
Fredag 19. desember 2003
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemiddel: B2 – Typegodkjend kalkulator med tomt minne.
– Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensur: 19. januar 2004.

Alle svar skal grunngjevast. Svar rett frå kalkulatoren er ikkje fullgodt svar.

Oppgåve 1 Finn Taylor-rekka med senter i punktet $z_0 = 0$ som representerer funksjonen

$$f(z) = \frac{z^{2003}}{z^{2004} - 1}.$$

Finn konvergensradien til denne potensrekka (Taylor-rekka).

Oppgåve 2 Løys differensiallikninga

$$y''(t) + 2y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t - 1, & \text{ellers} \end{cases}.$$

med startverdiar $y(0) = y'(0) = 0$. Hint: Laplace!

Oppgåve 3 Funksjonen $u(x,t)$ representerer temperaturfordelinga i ein stav med lengde π. Endepunkta held konstant temperatur. Sidan staven ikkje er fullstendig isolert, tilfredsstiller $u(x,t)$ følgjande

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{for } t > 0 \text{ og } 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 && \text{for } t > 0. \end{aligned}$$

Finn først alle løysingane av problemet på forma

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Bruk så superposisjonsprinsippet til å finne løysinga som i tillegg tilfredsstiller startkravet

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}.$$

Oppgåve 4 Integralet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{x^2+2x+5} dx.$$

er lik summen av residua i det øvre halvplanet for funksjonen

$$f(z) = \frac{e^{3iz}}{z^2+2z+5}$$

(Det øvre halvplanet vil seie den delen av det komplekse planet der $\mathrm{Im}(z) > 0$).

Finn residua i det øvre halvplanet for funksjonen $f(z)$, og bruk dette til å rekne ut integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2+2x+5} dx.$$

Oppgåve 5 Funksjonen $f(t)$ er kontinuerleg og har periode 1 for $t \geq 0$, dvs

$$f(t+1) = f(t) \quad \text{for } t \geq 0.$$

Vis at

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \frac{e^s}{e^s - 1} \int_0^1 e^{-st} f(t)dt.$$