TMA4120 Matematikk 4K
Høsten 2004

Løsningsforslag – Eksamen 2004–12–17

1 Vi vet at funksjonen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ der $u(x,y) = y^3 + Bx^2y$ er analytisk. Det betyr at funksjonen $u(x,y)$ oppfyller Laplaces ligning $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Dermed er

$$0 = 2By + 6y = 2y(B+3)$$

og vi får $B = -3$ siden dette skal gjelde for alle y.

Videere er funksjonene $u(x,y)$ og $v(x,y)$ konjugert harmoniske og oppfyller derfor Cauchy–Riemannligningene

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Fra dette følger at

$$v_y = u_x = -6xy \Rightarrow v(x,y) = -3xy^2 + \eta(x)$$

der $\eta(x)$ er en foreløpig vilkårlig funksjon av x. Innsatt dette i $u_y = -v_x$ får vi da

$$v_x = -3y^2 + \eta'(x) = -u_y = -(3y^2 - 3x^2) = 3x^2 - 3y^2$$

og dette gir $\eta'(x) = 3x^2$. Da følger $\eta(x) = x^3 + C$ der C er konstant. Dermed er

$$v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + C$$

og vi finner

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2 + C).$$

Fra betingelsen $f(0) = 0$ følger da at $C = 0$, så funksjonen $v(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Dermed er $f(z)$ gitt ved

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2) = iz^3.$$

2 Vi vet at $|e^{z_0}| = 5$. Da følger

$$|e^{2z_0+3i}| = |e^{2z_0}| = |(e^{z_0})^2| = |e^{z_0}|^2 = 5^2 = 25.$$

3 Vi skal finne Laurentrekken om $z_0 = 0$ og gyldig i området $0 < |z| < \infty$ til funksjonen

$$f(z) = \frac{e^{-1/z^2}}{z^2}.$$

Det er kjent at $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ og da får vi

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-1}{z^2}\right)^n = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,z^{2(n+1)}}.$$

Med de første ledd i Laurentrekken utskrevet får vi da

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2z^6} - \frac{1}{6z^8} + \cdots$$

og vi observerer at rekken bare inneholder like potenser av z. Spesielt er koeffisienten foran $1/z$ null, og det betyr at $\mathrm{Res}_{z=0}\{f(z)\} = 0$.

4 **a)** Innsatt produktformen $u(x,t) = X(x)T(t)$ i differensialligningen og dividert med $c^2u(x,t)$ må funksjonene $X(x)$ og $T(t)$ oppfylle relasjonen

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{X''}{X}$$

for alle $x \in (0,\pi)$ og alle $t > 0$. Det kan bare være tilfelle dersom forholdet er konstant, med andre ord $T''/(c^2T) = X''/X = k$ der k er en vilkårlig reell konstant. Vi har dermed redusert den opprinnelige partielle differensialligningen til to koblete ordinære differensialligninger

$$X''(x) - kX(x) = 0, \quad T''(t) - kc^2T(t) = 0.$$

Vi søker ikke-trivielle løsninger av disse ligningene og derfor kan ikke $X(x)$ være identisk null. Sammen med randbetingelsene følger da

$$0 < \int_0^\pi \big(X'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \big[XX'\big]_0^\pi - \int_0^\pi X(x)X''(x)\,\mathrm{d}x = -k\int_0^\pi \big(X(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

Dermed må $-k > 0 \Rightarrow k < 0$ og vi kan skrive $k = -p^2$ der vi uten tap av generalitet kan anta $p > 0$.

Innsatt dette i differensialligningen for $X(x)$ får vi dermed

$$X''(x) + p^2X(x) = 0$$

og denne ligningen har generell løsning $X(x) = C_1\cos px + C_2\sin px$. Randbetingelsene gir dermed at

$$X(0) = C_1 = 0 \quad X(\pi) = C_2\sin p\pi = 0$$

og dette kan oppfylles med $C_2 \neq 0$ dersom $\sin p\pi = 0$. Med andre ord må $p = n$ der n er et heltall større enn null og vi får $k = -n^2$. Dette innsatt i differensialligningen for $T(t)$ gir

$$T''(t) + (cn)^2T(t) = 0$$

som har generell løsning $T(t) = A_n\cos(cnt) + B_n\sin(cnt)$.

Alle løsninger på formen $X(x)T(t)$ som oppfyller randbetingelsene er derfor gitt ved

$$u_n(x,t) = A_n\cos(cnt)\sin(nx) + B_n\sin(cnt)\sin(nx), \quad n > 0$$

der A_n og B_n er vilkårlige konstanter.

b) En formell rekkeløsning av den partielle differensialligningen er gitt ved

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(cnt)\sin(nx) + B_n\sin(cnt)\sin(nx)).$$

Initialbetingelsene gir dermed at

$$0 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin nx, \quad c = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} cnB_n\sin nx$$

og dette betyr at $A_n = 0$ for alle n og at

$$\sum_{n=1}^{\infty} nB_n\sin nx = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{4}\,B_n\sin nx = \frac{\pi}{4}.$$

Fra oppgitt Fourierrekkeutvikling følger da at

$$\frac{\pi n}{4} B_n = \begin{cases} 0, & n \text{ like} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ odde} \end{cases}$$

og rekkeløsningen av differensialligningen som oppfyller initialbetingelsene er derfor gitt ved

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\bigl((2n-1)ct\bigr)}{(2n-1)^2} \sin\bigl((2n-1)x\bigr).$$

$\boxed{5}$ La $f(z) = \mathrm{e}^{2iz}/(z^2+6z+25) = \mathrm{e}^{2iz}/\bigl((z+3)^2+16\bigr)$. Funksjonen er singulær når $(z+3)^2+16 = 0 \Rightarrow z = -3 \pm 4i$. De singulære punktene er enkle poler, så residuet i $z_0 = -3+4i$ er gitt ved

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\{f(z)\} = \frac{\mathrm{e}^{2i(-3+4i)}}{2(-3+4i)+6} = \frac{\mathrm{e}^{-8-6i}}{8i}.$$

Punktet $z_0 = -3+4i$ er funksjonen $f(z)$s eneste singulære punkt i øvre halvplan, så

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2ix}}{x^2+6x+25}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{8i}\,\mathrm{e}^{-8-6i} = \frac{\pi}{4\mathrm{e}^8}\,(\cos 6 - i \sin 6).$$

Fra dette følger at

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+6x+25}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\mathrm{e}^{2ix}}{x^2+6x+25}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2ix}}{x^2+6x+25}\,\mathrm{d}x \\ &= \operatorname{Re}\frac{\pi}{4\mathrm{e}^8}\,(\cos 6 - i\sin 6) = \frac{\pi\cos 6}{4\mathrm{e}^8}. \end{aligned}$$