NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4120 Matematikk 4K
Høsten 2004

Løsningsforslag – Midtsemesterprøve

1 Funksjonen $f(x)$ er odde, så $a_n = 0$ for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vi finner videre at

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi/2}^{0} -\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi/2}\sin nx\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\big([\tfrac{1}{n}\cos nx]_{-\pi/2}^{0} + [-\tfrac{1}{n}\cos nx]_{0}^{\pi/2}\big) = \frac{2}{n\pi}(1-\cos\tfrac{n\pi}{2}) \\
&= \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n = 2m-1 \\ \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^m), & n = 2m, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n = 2m-1 \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2(2k-1) \\ 0, & n = 2(2k), \end{cases}
\end{aligned}$$

når $m \geq 1$ og $k \geq 1$. Sammensatt får vi dermed Fourierrekken

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x + \frac{4}{(4n-2)\pi}\sin(4n-2)x\Big) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\big(\sin(2n-1)x + \sin(4n-2)x\big).
\end{aligned}$$

Utskrevet eksplisitt blir de første leddene i rekken som følger

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\Big(\sin x + \sin 2x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{3} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 10x}{5} + \cdots\Big).$$

Konvergensteoremet for Fourierrekker (teorem 10.2.1, side 535) gir at Fourierrekkens sum i punktet $x = \pi/2$ er $1/2$.

2 Vi skal løse den ordinære andreordens differensialligningen

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \delta(t-1)$$

med initialbetingelsene $y(0) = 0, y'(0) = 0$. Vi bruker hintet. La $Y(s) = \mathscr{L}(y)(s)$. Laplace-transformasjon av ligningen gir

$$s^2Y + 3sY + 2Y = \mathrm{e}^{-s} \Leftrightarrow (s^2+3s+2)Y = \mathrm{e}^{-s} \Leftrightarrow Y = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2+3s+2}.$$

Ved delbrøksoppspalting finner vi da at $Y = (\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2})\,\mathrm{e}^{-s}$ og ved andre skifteteorem blir til slutt

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}(Y)(t) = (\mathrm{e}^{-(t-1)} - \mathrm{e}^{-2(t-1)})\,u(t-1)$$

der $u(t-1)$ er Heavisidefunksjonen (enhetssprangfunksjonen) ved tidspunkt $t = 1$.

Alternativt kan man ta utgangspunkt i uttrykket $Y = \mathrm{e}^{-s}/(s^2+3s+2)$ og lage fullstendig kvadrat:

$$Y = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2+3s+2} = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{(s+\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = 2\mathrm{e}^{-s}\,\frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}.$$

Inverstransformasjon av dette uttrykket samt bruk av andre skifteteorem gir da

$$y(t) = 2\mathrm{e}^{-3(t-1)/2}\sinh(\tfrac{t-1}{2})\,u(t-1).$$

De to uttrykkene for $y(t)$ er (selvsagt) ekvivalente.

$\boxed{3}$ Fra definisjonen av Fouriertransformen er

$$\hat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{e}^{-iwx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tfrac{x}{2}-3)\,\mathrm{e}^{-iwx}\,\mathrm{d}x.$$

Ved substitusjonen $y = \frac{x}{2} - 3 \Rightarrow x = 2y+6, \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}y$ får vi da

$$\begin{aligned}
\hat{g}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-iw(2y+6)}\,2\mathrm{d}y = 2\mathrm{e}^{-i6w}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-iw(2y)}\,\mathrm{d}y \\
&= 2\mathrm{e}^{-i6w}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{2w})y}\,\mathrm{d}y = 2\mathrm{e}^{-i6w}\hat{f}(\boldsymbol{2w}) = \frac{2\mathrm{e}^{-i6w}}{16+(2w)^4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-i6w}}{8(1+w^4)}.
\end{aligned}$$