Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. Peter Lindqvist (73 59 35 29)

EKSAMEN I MATEMATIKK 4K (TMA4120)

Fredag 17. desember 2004
Tid: 09:00 — 13:00

Hjelpemidler:

— Rottmann matematisk formelsamling

— Godkjent kalkulator HP 30S med tomt minne

Oppgave 1 Funksjonen

$$f(z) = y^3 + Bx^2y + iv(x, y)$$

er analytisk. Beregn konstanten B og bestem funksjonen $v(x, y)$ når det oppgis at $v(0, 0) = 0$. Hint: Laplaces ligning og Cauchy–Riemannligningene.

Oppgave 2 Et komplekst tall z_0 oppfyller $|\mathrm{e}^{z_0}| = 5$. Finn modulen $|\mathrm{e}^{2z_0+3i}|$.

Oppgave 3 Funksjonen $f(z)$ er gitt ved

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{-1/z^2}}{z^2}.$$

Finn først Laurentrekken om $z_0 = 0$ til $f(z)$ i området $0 < |z| < \infty$ og beregn deretter residuet $\mathrm{Res}_{z=0}\{f(z)\}$.

Oppgave 4 Utslaget $u(x,t)$ til en vibrerende streng av lengde π fastspent i begge ender oppfyller randverdiproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{for } 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \text{for } t > 0 \end{cases}$$

der $c \neq 0$ er konstant.

a) Finn alle løsninger på formen

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

som tilfredsstiller randbetingelsene $X(0) = X(\pi) = 0$.

b) Bruk superposisjonsprinsippet til å finne den rekkeløsning av problemet som i tillegg til randbetingelsene også tilfredsstiller initialbetingelsene

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, & \text{for } 0 \leq x \leq \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = c, & \text{for } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Oppgave 5 Man vet at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2ix}}{x^2 + 6x + 25}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left\{\frac{\mathrm{e}^{2iz}}{z^2 + 6z + 25}\right\}$$

der summen tas over funksjonens singulære punkter i øvre halvplan. Finn verdien av dette integralet og bestem til slutt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 6x + 25}\,\mathrm{d}x.$$

Noen formler du kan få bruk for:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots = \frac{\pi}{4}, \quad \text{for } 0 < x < \pi$$

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Lykke til!