Konvergens og sum av Fourierrekker

En 2π-periodisk funksjon f har **Fourierrekke**

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

der $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ og $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

Spørsmål: 1.) Når konvergerer Fourierrekken? (For hvilke f ?)

2.) Når er summen lik f ?

Eksempel 1:

$f(x) = \delta(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\cos 0 = \frac{1}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\sin 0 = 0$$

$\delta(x) \sim \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx\right)$, rekka konvergerer aldri!

Obs: $\delta(x)$ er ikke en funksjon!

Eksempel 2:

$f =$  $= \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots)$

Fra delsummene (egen transparent) ser vi at

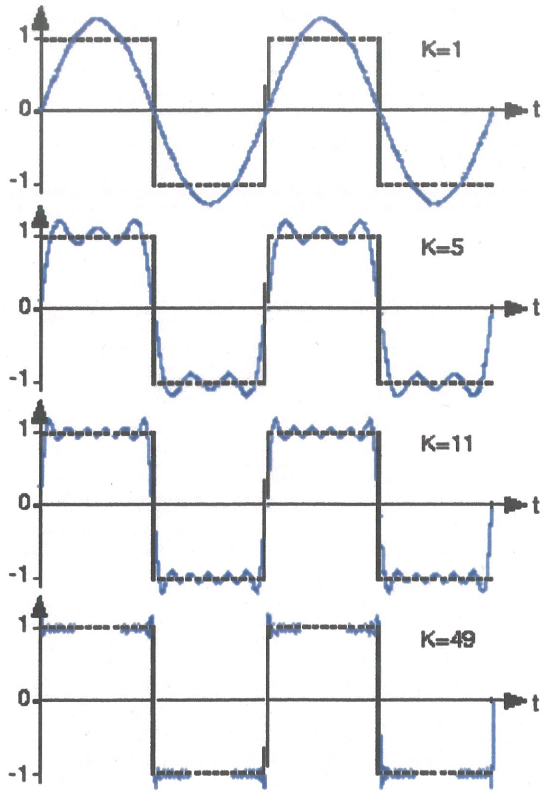
- rekka konvergerer mot $f(x)$ på $(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ [her er f kont.]
- rekka konvergerer mot $0 = \frac{1}{2}(f(0+)+f(0-))$ i $x=0$ uavhengig av f's verdi i $x=0$. [Her er f diskont.]

Teorem: Anta f 2π-periodisk og at f og f' er stykkevis kontinuerlige. Da konvergerer Fourierrekka til f mot $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$ i alle punkt x.

Spesielt er Fourierrekka lik f i alle punkt f er kontinuerlig

---

OBS: Fourierrekka konvergerer for praktisk talt alle funksjoner som opptrer i anvendelser.



Fourierrekke:

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x \cdots\right)$$