Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48

EKSAMEN I TMA4120 MATEMATIKK 4K

Nynorsk
Dag 30. november 2005
kl. 9–13

Hjelpemiddel (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 22.12.2005

Grungje alle svar. Det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten framgår tydeleg av besvarelsen.

Oppgåve 1 Bruk Laplacetransformasjonen til å løyse initialverdiproblemet

$$y' + y + \int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\,d\tau = u(t-1) \quad \text{for } t > 0, \qquad y(0) = 1.$$

Oppgåve 2

a) Finn alle løysninger på forma $u(x,t) = F(x)G(t)$ av differensiallikninga

(1) $$u_{tt} + u_t = u_{xx} \quad \text{for} \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0$$

med randvilkår

(2) $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0.$$

b) Finn $u(x,t)$ som oppfyller (1) og (2) og initialvilkåra

$$u(x,0) = 0 \quad \text{og} \quad u_t(x,0) = \sin 4x.$$

Oppgåve 3 La f vere den 2π–periodiske funksjonen gjeve ved $f(x) = x^4$ for $-\pi < x \leq \pi$. Vi oppgjev at f har Fourierrekke

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} \cos nx.$$

Bruk dette til å finne summen av rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - 6}{n^4} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^4 n^4 - 12\pi^2 n^2 + 36}{n^8}.$$

Oppgåve 4

a) Finn alle Laurentrekkene om punktet $z = 0$ for funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{z(8z^3 - 1)},$$

og dei åpne konvergensområda for kvar av rekkene.

b) La C vere einheitssirkelen $|z| = 1$ med positiv orientering (mot klokka). Bestem verdien av integrala

$$\oint_C f(z)\, dz \quad \text{og} \quad \oint_C (\operatorname{Re} z) dz$$

når $f(z)$ er funksjonen i **a)**.

Oppgåve 5

a) Vis at funksjonen

$$f(z) = \frac{e^{iz} - e^{5iz}}{z^2}$$

kan skrivast som

$$f(z) = \frac{b}{z} + g(z) \quad \text{når} \quad |z| > 0,$$

der b er eit komplekst tal og $g(z)$ er ein analytisk funksjon. Bestem b.

La S_R vere halvsirkelen med parametriseringa $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Vis ved utrekning at

$$\int_{S_R} f(z) dz \to 4\pi \quad \text{når} \quad R \to 0.$$

b) Vis ved utrekning at

$$\int_{S_R} f(z)dz \to 0 \quad \text{når} \quad R \to \infty,$$

der funksjonen $f(z)$ og halvsirkelen S_R er gjeve i a). Finn verdien av integralet

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2} dx.$$

Du kan anta at integralet konvergerer/eksisterer.

Table of Laplace transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$