



Fagleg kontakt under eksamen:

Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48

Espen R, Jakobsen tlf. 73 59 35 12

EKSAMEN I TMA4120 MATEMATIKK 4K

Nynorsk

Dag 9. august 2006

kl. 15–19

Hjelpemiddel (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)

Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Grungje alle svar. Det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten framgår tydeleg av besvarelsen.

Oppgåve 1 Løys likninga $\cos z = 2$.

Oppgåve 2 La $y(t)$ vere løysninga av initialverdiproblemet

$$\begin{aligned}y'' + 4y' + 4y &= f(t) \quad \text{for } t > 0 \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 0\end{aligned}$$

der

$$f(t) = \begin{cases} 5 \sin t & \text{for } 0 < t < 2\pi, \\ 0 & \text{for } t > 2\pi. \end{cases}$$

Vis at då er Laplacetransformasjonen til y gjeve ved

$$Y(s) = G(s)(1 - e^{-2\pi s}) \quad \text{der} \quad G(s) = \frac{3 - 4s}{5(s^2 + 1)} + \frac{4}{5(s + 2)} + \frac{1}{(s + 2)^2}.$$

Finn $y(2\pi)$.

Oppgave 3 Finn den Fouriertransformerte til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{når } x \geq 0, \\ -e^x & \text{når } x < 0. \end{cases}$$

Bruk resultatet til å bestemme integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{w \sin w}{1 + w^2} dw.$$

Oppgave 4

a) Finn alle funksjonane $u(x, t) = F(x)G(t)$ slik at

$$(1) \quad t^3 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{for } 0 < x < \pi, t > 0,$$

og

$$(2) \quad u(0, t) = 0 = u(\pi, t) \quad \text{for } t > 0.$$

b) Finn ein funksjon $u(x, t)$ som tilfredstiller (1), (2) og

$$u(x, 1) = 4 \sin x + \sin 4x.$$

Oppgave 5 Rekn ut integrala

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{3 - 2 \cos x} dx \quad \text{og} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{3 - 2 \cos x} dx$$

ved bruk av residyrekning.

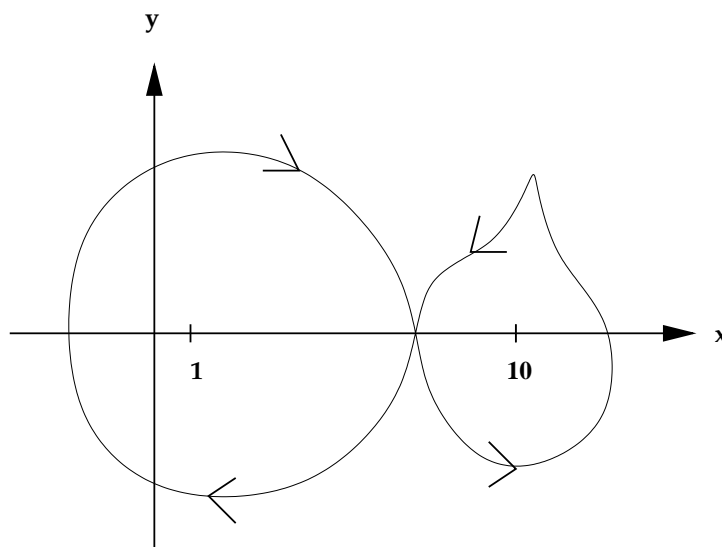
Oppgave 6 Funksjonen $f(z)$ er gjeve som

$$f(z) = \frac{10}{z^2(z-10)}.$$

- a) La C_1 og C_2 vere sirklane $|z| = 1$ og $|z - 10| = 11$ med orientering mot klokka (positiv orientering). Finn verdiane av integrala

$$\oint_{C_1} f(z)dz \quad \text{og} \quad \oint_{C_2} f(z)dz.$$

Kurva C_3 er gjeve av figuren under:



Figur 1: God natt, Solan Gundersen!

Orienteringa er gitt av pilene på figuren. Kva er verdien av integralet

$$\oint_{C_3} f(z)dz?$$

- b) Finn alle Laurentrekkene til $f(z)$ om $z = 10$ og dei åpne konvergensområda for kvar av rekkene. (Hint: $(1-t)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$ for $|t| < 1$).

Table of Laplace transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n ($n = 0, 1, 2, \dots$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$