EKSAMEN I TMA4120 MATEMATIKK 4K, 30.11.2005.
LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1.

$$y' + y + \int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}d\tau = u(t-1) \quad t > 0, \quad y(0) = 1$$

Anta at den Laplacetransformerte $Y(s)$ av $y(t)$ eksisterer. Siden integralet er konvolusjonen av $y(t)$ og e^t, kan vi Laplacetransformere ligningen. Det gir

$$\begin{aligned} sY - 1 + Y + Y \cdot \frac{1}{s-1} &= e^{-s} \cdot \frac{1}{s} \\ Y\left(s + 1 + \frac{1}{s-1}\right) &= 1 + \frac{e^{-s}}{s} \\ Y \cdot \frac{s^2}{s-1} &= 1 + \frac{e^{-s}}{s} \\ Y = \frac{s-1}{s^2} + \frac{s-1}{s^3}e^{-s} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right)e^{-s} \end{aligned}$$

Vi får derfor ved invers Laplacetransformasjon at

$$y(t) = 1 - t + [t - 1 - \tfrac{1}{2}(t-1)^2]u(t-1) = 1 - t + \tfrac{1}{2}(1-t)(t-3)u(t-1).$$

Oppgave 2.

a) Vi setter $u(x,t) = F(x)G(t)$ inn i randverdiproblemet:

$$F\ddot{G} + F\dot{G} = F''G \quad \text{for } 0 \le x \le \pi, \ t \ge 0, \quad F(0) = F(\pi) = 0.$$

$u(x,t) \equiv 0$ er opplagt en løsning. Vi søker produktløsninger $u(x,t) \not\equiv 0$. Separasjon av de variable gir

$$\frac{\ddot{G}}{G} + \frac{\dot{G}}{G} = \frac{F''}{F} = k$$

der k er en (foreløpig ukjent) konstant. Vi løser først randverdiproblemet for F. Formen på løsningen av differensialligningen $F'' = kF$ for F avhenger av fortegnet for k. Vi vurderer de tre tilfellene $k > 0$, $k = 0$ og $k < 0$ hver for seg.

$k > 0$: Løsningene har da formen

$$F(x) = A\,e^{\sqrt{k}x} + B\,e^{\sqrt{k}x}$$

der kravene $F(0) = F(\pi) = 0$ medfører at $F(0) = A + B = 0$ og $F(\pi) = 2A\sinh(\sqrt{k}\pi) = 0$, altså $A = B = 0$, $F(x) \equiv 0$ og derved $u(x,t) \equiv 0$.

$k = 0$: Løsningene har da formen $F(x) = A + Bx$. Kravene $F(0) = F(\pi) = 0$ medfører derfor at $F(0) = A = 0$ og $F(\pi) = B\pi = 0$, altså $B = 0$, $F(x) \equiv 0$ og derved $u(x,t) \equiv 0$.

$k < 0$: Løsningene har da formen

$$F(x) = A\cos\left(\sqrt{|k|}x\right) + B\sin\left(\sqrt{|k|}x\right)$$

der kravene $F(0) = F(\pi) = 0$ gir $F(0) = A = 0$ og $F(\pi) = B\sin\left(\sqrt{|k|}\pi\right) = 0$ som holder for $\left(\sqrt{|k|}\pi\right) = n\pi$ for $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, det vil si, for $k = -n^2$. De eneste løsningene utenom nulløsningen for randverdiproblemet for F er derfor $F_n(x) = B_n \sin nx$ som krever at $k = -n^2$.

Differensialligningen for G har derfor formen

$$\ddot{G} + \dot{G} + n^2 G = 0$$

som har generell løsning

$$G(t) = e^{-t/2}[C\cos\sqrt{n^2 - \tfrac{1}{4}}t + D\sin\sqrt{n^2 - \tfrac{1}{4}}t].$$

Derved er produktløsningene av den opprinnenlige ligningen (i tillegg til nulløsningen)

$$u_n(x,t) = e^{-t/2}[C_n\cos\sqrt{n^2 - \tfrac{1}{4}}t + D_n\sin\sqrt{n^2 - \tfrac{1}{4}}t]\sin nx \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

($n = 0$ gir bare nulløsningen. n negativ gir de samme løsningene som n positiv. Konstantene B_n er slått sammen med C_n og D_n.)

b)Det ser ut som om $u_4(x,t)$ kan tilpasses initialkravene. Vi prøver: $u_4(x,0) = C_4 \sin 4x = 0$ for $C_4 = 0$, slik at $u_4(x,t) = D_4 e^{-t/2}\sin(t\sqrt{63/4})\sin 4x$, og derved

$$\frac{\partial}{\partial t}u_4(x,t) = D_4[-\frac{1}{2}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{63}\,t}{2} + e^{-t/2}\frac{\sqrt{63}}{2}\cos\frac{\sqrt{63}\,t}{2}]\sin 4x$$

som har verdien $D_4\frac{\sqrt{63}}{2}\sin 4x$ for $t = 0$. Dette skal være lik $\sin 4x$ ifølge initialkravet. Altså er $D_4 = 2/\sqrt{63} = 2\sqrt{7}/21$. Løsningen vi søker er derfor

$$u(x,t) = \frac{2\sqrt{7}}{21}e^{-t/2}\sin\frac{3\sqrt{7}\,t}{2}\sin 4x.$$

Oppgave 3. La $F(x)$ betegne summen av Fourierrekken for $f(x)$. Da er $F(x) = f(x)$ for alle x der f er kontinuerlig. Siden $f(x)$ er kontinuerlig for alle x (også i skjøtepunktene $x = n\pi$), er $F(x) = f(x)$ for alle x, det vil si,

$$f(x) = x^4 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} \cos nx \quad \text{for } -\pi \le x \le \pi$$

og derfor

$$f(\pi) = \pi^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} \cos n\pi = \frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - 6}{n^4}$$

og derved

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - 6}{n^4} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{5}\right)\pi^4 = \frac{\pi^4}{10}.$$

La S betegne summen av den neste rekken. Den kan skrives som $\frac{1}{64}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. For dem som husker Parceval's formel

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

kan oppgaven løses slik:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^8 dx = 2\left(\frac{\pi^4}{5}\right)^2 + 64S$$

der venstre side er lik $2\pi^8/9$, slik at $S = (2\pi^8/9 - 2(\pi^4/5)^2)/64 = \pi^8/450$.

Vi andre, vanlige dødelige kan for eksempel tenke slik: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. Altså er

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\right)\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\right) \\ &= a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cos^2 nx + \text{masse ledd med} \quad \cos nx \cos mx \ \text{ der } \ 0 \le m < n. \end{aligned}$$

For å kvitte oss med alle leddene med $\cos mx \cos nx$, kan vi integrere over en periode:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx \\ &\qquad + \text{masse ledd med} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx \ \text{ der } \ m \ne n. \end{aligned}$$

Hele Fourierekketeorien er basert på at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi \quad \text{og} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0 \ \text{ for } \ m \ne n.$$

(Det kan også lett regnes ut.) Derved får vi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = a_0^2 \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot \pi + 0 = \pi\left(2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)$$

og summen S finnes som over.

Oppgave 4.

a) $f(z)$ har fire enkle poler: $z_0 = 0$, $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1}{2}e^{2\pi i/3}$ og $z = \frac{1}{2}e^{4\pi i/3}$. $f(z)$ vil derfor ha to ulike Laurentrekker med sentrum i origo; en som konvergerer i $0 < |z| < \frac{1}{2}$ og en som konvergerer for $|z| > \frac{1}{2}$. Formen på rekkene er $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Vi kan derfor sette $\frac{1}{z}$ utenfor i første omgang.

$0 < |z| < \frac{1}{2}$:

$$f(z) = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-8z^3} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(8z^3)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} 8^n z^{3n-1}.$$

$|z| > \frac{1}{2}$:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{8z^3} \cdot \frac{1}{1-1/8z^3} = \frac{1}{8z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8z^3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^{n+1}}z^{-3n-4}.$$

b) Vi benytter Laurentrekken for $f(z)$ som gjelder for $|z| > \frac{1}{2}$ fordi C ligger i dette området. Da er

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^{n+1}}\oint_C z^{-3n-4}dz = 0$$

fordi $\oint_C z^k\,dz = 0$ for alle heltalls $k \neq -1$.

Alternativt kan vi finne verdien av integralet ved residyregning:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[\mathrm{Res}_{z=0}f(z) + \mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}}f(z) + \mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}e^{2\pi i/3}}f(z) + \mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}e^{4\pi i/3}}f(z)]$$

der

$$\mathrm{Res}_{z=0} = \frac{1}{8\cdot 0^3 - 1} = -1, \quad \mathrm{Res}_{z=\frac{1}{2}e^{k\pi i/3}} = \frac{1}{32z^3-1}\bigg|_{z=\frac{1}{2}e^{k\pi i/3}} = \frac{1}{3} \quad \text{for } k = 0,2,4$$

som igjen gir at $\oint_C f(z)dz = 0$.

Det andre integralet er integralet av en ikke-analytisk funksjon. Det kan for eksempel beregnes slik:

$$\oint_C (\mathrm{Re}\, z)dz = \oint_C \frac{1}{2}(z+\overline{z})dz = \frac{1}{2}\oint \overline{z}\,dz = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta} i\, e^{i\theta}d\theta = \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \pi i$$

der vi har brukt at $\oint_C z\,dz = 0$ ved Cauchy's integralteorem, og parametriseringen $z = e^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$ for C, slik at $\overline{z} = e^{-i\theta}$ og $dz = ie^{i\theta}d\theta$.

Oppgave 5.

a)

$$f(z) = \frac{e^{iz} - e^{5iz}}{z^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5iz)^n}{n!}}{z^2}$$
$$= \frac{1 + \frac{iz}{1!} - 1 - \frac{5iz}{1!} + \{\text{ledd av grad} \geq 2\}}{z^2} = \frac{-4i}{z} + g(z)$$

der $g(z)$ er gitt ved en konvergent Taylorrekke, og derfor er analytisk. Vi har derfor $b = -4i$.

Vi bruker den gitte parametriseringen av integrasjonsveien S_R:

$$\int_{S_R} f(z)dz = \int_{S_R} \frac{-4i}{z}\,dz + \int_{S_R} g(z)dz = \int_0^{\pi} \frac{-4i}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta + \int_{S_R} g(z)dz$$
$$= 4\int_0^{\pi} d\theta + \int_{S_R} g(z)dz = 4\pi + \int_{S_R} g(z)dz.$$

La $R \to 0$. Da vil $\int_{S_R} g(z)dz \to 0$ fordi g analytisk medfører at g er begrenset på S_R, slik at $|\int_{S_R} g(z)dz| \leq M \cdot \pi R \to 0$ ved ML-ulikheten. Altså er $\lim_{R\to 0} \int_{S_R} f(z)dz = 4\pi$.

b)

$$\left|\int_{S_R} f(z)dz\right| \leq \left|\frac{e^{ix-y} - e^{5ix-5y}}{R^2}\right| \cdot \pi R \leq \frac{e^0 + e^0}{R^2} \cdot \pi R = \frac{2\pi}{R} \to 0$$

når $R \to \infty$.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2} dx$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{5ix}}{2x^2} dx = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

der $f(z)$ er funksjonen fra a). La $0 < r < R$. La C være den lukkede kurven som består av halvsirklene S_R og $-S_r$ og de to rette linjestykkene fra $-R$ til $-r$ og fra r til R langs x-aksen, tatt i positiv omløpsretning. Da er

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{-r} f(z)dz - \int_{S_r} f(z)dz + \int_r^R f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz$$

der $\oint_C f(z)dz = 0$ ved Cauchy's integralteorem. La $R \to \infty$ og $r \to 0^+$. Da går denne likheten mot

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - 4\pi.$$

Derfor er $I = 4\pi/4 = \pi$.