LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN TMA4120 MATEMATIKK 4K, 09.08.2006

Oppgave 1 Bruker $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ og $u = e^{iz}$ til å omskrive likningen til

$$u + u^{-1} = 4.$$

Siden $u = 0$ ikke løser likningen, multipliserer vi med u og finner at $u = 2 \pm \sqrt{3}$. Dermed er

$$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} = e^{\ln(2 \pm \sqrt{3}) + i\,2\pi n},$$

og $iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i\,2\pi n$ s.a. $\underline{z = 2\pi n - i\ln(2 \pm \sqrt{3})}$ for alle hele tall n.

Oppgave 2 Ved bruk av Laplacetransformasjonen svarer differensialligningen med initialbetingelsene til den lineære ligningen

$$s^2 Y + 4sY + 4Y = F(s) \quad \text{som gir}$$
$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s+2)^2}.$$

Ved hjelp av enhets trappefunksjonen (Heavyside-funksjonen) kan vi skrive

$$f(t) = 5\sin t - 5\sin(t - 2\pi)u(t - 2\pi)$$

og dermed blir

$$F(s) = \frac{5}{s^2+1} - \frac{5}{s^2+1}e^{-2\pi s} = \frac{5}{s^2+1}(1 - e^{-2\pi s}).$$

Setter vi $Y(s) = G(s)(1 - e^{-2\pi s})$, ser vi at

$$G(s) = \frac{5}{(s^2+1)(s+2)^2} = \frac{1}{5}\frac{3-4s}{(s^2+1)} + \frac{1}{5}\frac{4}{(s+2)} + \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Inverse Laplacetransformasjon gir

$$g(t) = \frac{3}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t + \frac{4}{5}e^{-2t} + te^{-2t}, \qquad \text{og}$$
$$y(t) = g(t) - g(t - 2\pi)u(t - 2\pi) \qquad \text{slik at}$$
$$y(2\pi) = g(2\pi) - g(0) = \underline{-\frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5} + 2\pi\right)e^{-4\pi}}.$$

Oppgave 3 Vi bruker definisjonen:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(-\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-iwx}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-iwx}dx\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(-\frac{1}{1-iw}+\frac{1}{1+iw}\Big)\\ &= \underline{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-iw}{1+w^2}}.\end{aligned}$$

Derfor er også

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{-iw}{1+w^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-iwe^{iw}}{1+w^2}dw,$$

slik at

$$f(1) = e^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{iwe^{iw}}{1+w^2}dw.$$

Siden

$$I := \int_0^\infty \frac{w\sin w}{1+w^2}dw = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w\sin w}{1+w^2}dw = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{iwe^{iw}}{1+w^2}dw,$$

er derfor

$$I = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(-\pi f(1)) = \underline{\frac{\pi}{2e}}.$$

Oppgave 4

a) Setter vi $u = F(x)G(t)$ inn i ligning (1) får vi $t^3G'F = F''G$ og siden vi ikke er interessert i den trivielle løsningen får vi

$$\frac{t^3G'F}{FG} = \frac{F''G}{FG} \quad \text{som gir oss at} \quad \frac{t^3G'}{G} = \frac{F''}{F} = \text{konstant} = k.$$

Når vi også tar hensyn til randbetingelsene (2), får vi følgende randverdiproblem for F,

$$F'' = kF \quad \text{for } x \in (0,\pi), \qquad F(0) = F(\pi) = 0.$$

Her får vi løsning F ulik 0 kun hvis $k = -n^2$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Løsingen er da $F_n(x) = B_n \sin nx$ der B_n er en vilkårlig konstant. Den andre likningen blir nå

$$t^3G' = -n^2G \quad \text{som kan skrives på formen} \quad \int\frac{dG}{G} = -n^2\int\frac{dt}{t^3}.$$

Løsningene blir

$$G_n(t) = C_n\,e^{\frac{n^2}{2t^2}} \quad \text{for en vilkårlig konstant } C_n.$$

Svaret på oppgaven blir dermed

$$u_n(x,t) = G_n(t)F_n(x) = D_n\,e^{\frac{n^2}{2t^2}}\sin nx, \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

der $D_n = B_nC_n$ er en vilkårlig konstant.

b) Den generelle løsningen av (1) som tilfredstiller randkravene (2), kan skrives som Fourierrekke

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\, e^{\frac{n^2}{2t^2}} \sin nx.$$

Setter vi så inn initialkravet $u(x,1) = 4\sin x + \sin 4x$ gir dette at alle D_n-ene forsvinner bortsett fra $D_1 e^{\frac{1}{2}} = 4$ og $D_4 e^8 = 1$. Løsningen blir

$$u(x,t) = 4e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{t}-1)} \sin x + e^{8(\frac{1}{t^2}-1)} \sin 4x.$$

Oppgave 5 Oppgaven blir enklere å løse hvis en ser at

$$I := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{3 - 2\cos x} dx + i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{3 - 2\cos x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix}}{3 - 2\cos x} dx.$$

Bruk substitusjonen $z = e^{ix}$, $\cos x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, $dz = iz dx$, til å skrive I som

$$\oint_C \frac{z}{3 - (z + z^{-1})} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{iz}{z^2 - 3z + 1} dz,$$

der C er sirkelen med sentrum i $z = 0$ og radius 1 orientert mot klokka. Integranden har enkle poler i $z_\pm = 3/2 \pm \sqrt{5}/2$, men bare z_- ligger innenfor C. Residyet her er

$$\operatorname{Res}_{z=z_-} \frac{iz}{z^2 - 3z + 1} = \lim_{z \to z_-} (z - z_-) \frac{iz}{(z - z_-)(z - z_+)} = \frac{iz_-}{z_- - z_+} = -i \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Residyteoremet gir da at

$$I = 2\pi i(-i) \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \pi \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}},$$

og slik I ble definert ser vi da at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{3 - 2\cos x} dx = \pi \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \qquad \text{og} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{3 - 2\cos x} dx = 0.$$

Oppgave 6

a) Funksjonen $f(z)$ har to poler, en i $z = 0$ (orden 2) og en i $z = 10$ (orden 1). Residyene til f er

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \to 0} \left(z^2 f(z)\right)' = -\frac{1}{10} \qquad \text{og} \qquad \operatorname{Res}_{z=10} f(z) = \lim_{z \to 10} (z - 10) f(z) = \frac{1}{10}.$$

Siden C_2 omslutter begge polene mens C_1 bare omslutter $z = 0$ gir residyteoremet at

$$\oint_{C_1} f(z) dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{10}\right) = -\frac{\pi i}{5} \qquad \text{og} \qquad \oint_{C_2} f(z) dz = 2\pi i \big(\frac{1}{10} - \frac{1}{10}\big) = 0.$$

Kurven C_3 kan deles i to lukka kurver, en kurve C_3^0 som omlsutter $z = 0$ og er orientert *med* klokka og en kurve C_3^{10} som omslutter $z = 10$ og er orientert *mot* klokka. Hvis $-C_3^0$ betegner kurven C_3^0 med motsatt orientering (*mot* klokka), har vi nå at

$$\oint_{C_3} f(z)dz = -\oint_{-C_3^0} f(z)dz + \oint_{C_3^{10}} f(z)dz = -2\pi i \frac{-1}{10} + 2\pi i \frac{1}{10} = \frac{2\pi i}{5}.$$

Obs: Minustegnet etter 1. likhetstegn kommer fordi C_3^0 er orientert *med* klokka.

b) Ideen er å omskrive funksjonen vha. kjente rekkeformler til en rekke med sentrum i $z = 10$:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(z-10+10)^2} = \begin{cases} \frac{1}{10^2\left(1+\frac{z-10}{10}\right)^2} & = \frac{1}{10^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(-\frac{z-10}{10}\right)^{n-1} \quad \text{når } \left|\frac{z-10}{10}\right| < 1 \\ \frac{1}{(z-10)^2\left(1+\frac{10}{z-10}\right)^2} & = \frac{1}{(z-10)^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(-\frac{10}{z-10}\right)^{n-1} \quad \text{når } \left|\frac{10}{z-10}\right| < 1. \end{cases}$$

Her har vi brukt formelen som er oppgitt som hint til oppgaven. Siden $f(z) = \frac{10}{z-10}\frac{1}{z^2}$ konkluderer vi med at det er to Laurentrekker til f om $z = 10$, en som konvergerer på $0 < |z-10| < 10$,

$$\frac{10}{z-10}\frac{1}{10^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(-\frac{z-10}{10}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}(z-10)^{n-2},$$

og en som konvergerer på $|z-10| > 10$,

$$\frac{10}{z-10}\frac{1}{(z-10)^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(-\frac{10}{z-10}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n10^{n+2}}{(z-10)^{n+4}}.$$

[Kommentar: Siden f er analystisk bortsett fra i polene $z = 0$ og $z = 10$, har f to Laurentrekker om den enkle polen $z = 10$. De må ha formen

$$f(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-10)^n \qquad \text{for} \quad 0 < |z-10| < 10,$$

og

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-10)^n \qquad \text{for} \quad |z-10| > 10.]$$