Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN I TMA4120 MATEMATIKK 4K, 13.12.2006

Oppgave 1 Siden e^z er analytisk kan vi bruke analysens fundamentalteorem,

$$\int_{C_1} e^z\,dz = [e^z]_{z(0)}^{z(1)} = e^{\frac{\pi}{4}+\pi i} - 1 = -(1+e^{\frac{\pi}{4}}).$$

Det andre integralet kan regnes ut ved residyteoremet ($f(z) = z^{-7}e^z$ har kun en singularitet, en orden 6 pol i $z=0$) eller med Cauchys integralformel for den 6-deriverte til e^z. I begge tilfeller får en (kan en få):

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{6!}(e^z)^{(6)}\Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{360}.$$

Oppgave 2 Fra grafen ser vi at

$$r(t) = u(t) + u(t-1) - 2u(t-2).$$

Vi anvender Laplacetransformen på den ordinære differentialligningen og får

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + sY - y(0) - 2Y = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s},$$

som gir

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1+e^{-s}-2e^{-2s}}{s(s^2+s-2)}.$$

En alternativ måte å finne $\mathcal{L}(r)$ er å bruke definisjonen på Laplace transformen direkte.

Oppgave 3 Vi bruker formlen (Rottman s.176):

$$\mathcal{F}(f*g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

og får

$$\mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(e^{-x^2} * e^{-x^2}) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(e^{-x^2})\mathcal{F}(e^{-x^2}) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{w^2}{4}}\right)^2.$$

Derfor er

$$\mathcal{F}(h) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{w^2}{2}}.$$

For $a = \frac{1}{2}$ gir formlen som er gitt i oppgaveteksten at $\mathcal{F}(e^{-\frac{1}{2}x^2}) = e^{-\frac{w^2}{2}}$, og dermed er

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(h) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{w^2}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Oppgave 4 Vi finner først Laurentrekkene on $z = 1$ for $g(z) = \frac{1}{z}$. Den har to slike Laurentrekker, en for $|z-1| < 1$ og en for $|z-1| > 1$ fordi g bare har en singularitet i origo. Begge skal ha formen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, og vi finner dem ved å betrakte $g(z)$ som summen av en geometrisk rekke:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1+1} = \begin{cases} \frac{1}{1+(z-1)} \underset{u=-(z-1)}{=} \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \underset{u=-(z-1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \\ \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} \underset{v=-(z-1)^{-1}}{=} -v\frac{1}{1-v} = -\sum_{n=0}^{\infty} v^{n+1} = -\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(z-1)^{-m}. \end{cases}$$

Den første rekke konvergerer for $|u| = |z-1| < 1$ og den andre for $|v| = |z-1|^{-1} < 1$ dvs. for $|z-1| > 1$. Så finner vi Laurentrekkene om $z = 1$ for $h(z) = \frac{e^z}{z-1}$. Det er bare en slik Laurentrekke siden $z = 1$ er den eneste singulariteten for h. Rekken skal ha formen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Observer at $e^z = e^{z-1+1} = ee^{z-1}$ slik at MacLaurin (Taylor) rekka til e^z gir

$$\frac{e^z}{z-1} \underset{w=z-1}{=} \frac{e}{w}e^w = \frac{e}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}w^n = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^{n-1}.$$

Denne rekken konvergerer for alle $|w| = |z-1| > 0$. Ved å kombinere disse to resultatene får vi at

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(z-1)^{n-1} = \frac{e}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1} + \frac{e}{(n+1)!}\right](z-1)^n \\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(z-1)^m} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(z-1)^{n-1}, \end{cases}$$

der den første rekken konvergerer for $0 < |z-1| < 1$ og den andre rekken for $|z-1| > 1$.

Oppgave 5

a) Telleren til $f(z)$ har hverken nullpunkt ($e^z \neq 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$) eller singulariteter (bortsett fra i $z = \infty$). Dermed er det nullpunktene til nevneren $h(z)$ som gir singularitetene for $f(z)$:

$$z = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2} = 1 \pm i,$$

dvs. $f(z)$ har (orden 1) poler i $1 \pm i$. Residyene blir da som følger

$$\operatorname*{Res}_{z=1\pm i} f(z) = \left.\frac{e^{-iwz}}{h'(z)}\right|_{z=1\pm i} = \frac{e^{-iw(1\pm i)}}{2(1\pm i)-2} = \mp\frac{i}{2}e^{-iw}e^{\pm w}.$$

b) Husk at $w \leq 0$ og observerer at hvis $z = x + iy$, da er

$$|e^{-iwz}| = |e^{-iwx}|e^{wy} = e^{wy} \leq 1 \quad \text{når} \quad y \geq 0,$$

dvs. for z i øvre halvplan hvor også S_R ligger. Ved bruk av ML-ulikheten får vi

$$\left| \int_{S_R} f(z)\, dz \right| \leq \max_{z \in S_R} \frac{|e^{-iwz}|}{|z^2 - 2z + 2|} \pi R \leq \max_{|z|=R} \frac{1}{|z^2 - 2z + 2|} \pi R$$
$$\leq \frac{1}{R^2} \max_{|z|=R} \frac{1}{\left| \left(\frac{z}{R}\right)^2 - \frac{2}{R}\left(\frac{z}{R}\right) + \frac{2}{R^2} \right|} \pi R \underset{w=\frac{z}{R}}{=} \frac{1}{R^2} \max_{|w|=1} \frac{1}{\left| w^2 - \frac{2}{R} w + \frac{2}{R^2} \right|} \pi R \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

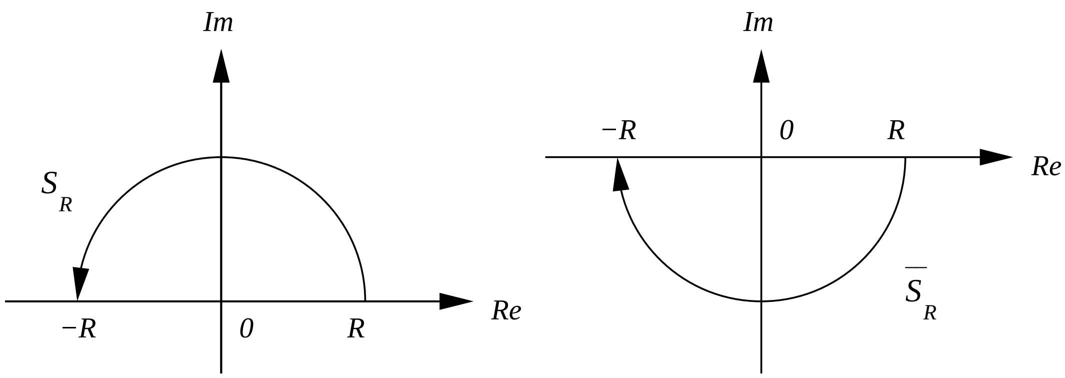
fordi $\left| w^2 - \frac{2}{R} w + \frac{2}{R^2} \right| \to 1$ når $|w| = 1$ og $R \to \infty$.

c) Fouriertransformen til $g(x)$ er

$$\hat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \quad \text{for} \quad w \in \mathbb{R}.$$

Vi skal bestemme denne ved konturintegrasjon og residyregning.

Først lar vi $w \leq 0$ (som i b)), og la C_R være den lukka kurven som består av linjestykket fra $-R$ til R på den reelle aksen og halvsirkelen S_R i øvre halvplan (se figur nedenfor).



Da er

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \left(\int_{C_R} f(z)\, dz - \int_{S_R} f(z)\, dz \right).$$

Integralet over S_R går mot 0 (se b)) og integralet over C_R regnes ut ved hjelp av residyteoremet og resultatene fra a) (obs: $1 + i$ er eneste pol i øvre halvplan):

$$\int_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1+i} f(z) = \pi e^{-iw} e^{w}.$$

Siden

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2\,\text{Arctan}(\infty) = \pi < \infty,$$

så er f absolutt integrerbar of $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \text{pr.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Altså kan vi konkludere med at

$$\underline{\hat{g}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-iw} e^{w} \quad \text{for} \quad w \leq 0.}$$

Når $w \geq 0$ kan vi ikke bruke samme kontur C_R som over. Problemet er at vi ikke lenger har at $|e^{-iwz}|$ er begrenset (av 1) i øvre halvplan og dermed vil ikke integralet over S_R gå mot 0. Derimot for $z = x + iy$ er

$$|e^{-iwz}| = |e^{-iwx}| e^{wy} = e^{wy} \leq 1 \quad \text{for} \quad y \leq 0,$$

dvs. $|e^{-iwz}|$ er begrenset (av 1) i nedre halvplan. Dermed legger vi konturen i nedre halvplan som vist i figuren over. La $\bar{C}_R : z(\theta) = Re^{-i\theta}$ for $0 \leq \theta \leq \pi$. Denne halvsirkelen ligger i nedre halvplan og er vist på figuren over. Videre la $\bar{C}_R$ være den lukka kurven som består av halvsirken $\bar{S}_R$ og linjestykket fra $-R$ til R på den reelle aksen (se figur over). Obs: $\bar{C}_R$ er orientert *med* klokka. Da er

$$\sqrt{2\pi}\, \hat{g}(w) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\bar{C}_R} f(z)\,dz - \int_{\bar{S}_R} f(z)\,dz \right).$$

Som i b) finner vi at

$$\left| \int_{\bar{S}_R} f(z)\,dz \right| \leq \max_{|z|=R} \frac{1}{|z^2 - 2z + 2|} \pi R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

og residyteoremet og a) (obs: $1 - i$ er eneste pol i nedre halvplan) gir

$$\int_{\bar{C}_R} f(z)\,dz = -\int_{-\bar{C}_R} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1-i} f(z) = \pi e^{-iw} e^{-w}.$$

Dermed kan vi konkludere med at

$$\underline{\hat{g}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-iw} e^{-w} \quad \text{for} \quad w \geq 0,}$$

og sammenlagt får vi da

$$\underline{\hat{g}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-iw} e^{-|w|} \quad \text{for} \quad w \in \mathbb{R}.}$$

Oppgave 6

a) Ved innsetting ser vi at:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 \pm u_2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1 \pm u_2) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) \pm \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) = 0,$$

og

$$\begin{aligned} (u_1+u_2)(0,t) &= 2a, & \qquad (u_1-u_2)(0,t) &= 0, \\ (u_1+u_2)(1,t) &= 2b, & \qquad (u_1-u_2)(1,t) &= 0. \end{aligned}$$

Altså løser $u_1 + u_2$ randverdiproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{for} \quad t > 0 \quad \text{og} \quad x \in (0,1), \\ u(0,t) = 2a & \text{for} \quad t > 0, \\ u(1,t) = 2b & \text{for} \quad t > 0, \end{cases},$$

og $u_1 - u_2$ løser (**).

Superposisjonsprinsippet holder for (*) dersom $Au_1(x,t) + Bu_2(x,t)$ også løser (*) for alle reelle tall A og B:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au_1 + Bu_2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Au_1 + Bu_2) = A\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) + B\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) = 0,$$

og

$$(Au_1 + Bu_2)(0,t) = (A+B)a \quad \text{og} \quad (Au_1 + Bu_2)(1,t) = (A+B)b,$$

dvs. $Au_1(x,t) + Bu_2(x,t)$ løser (*) bare når $a = 0 = b$. Dermed holder superposisjonsprinsippet ikke for (*) når a eller b er ulik null. Men det holder for (**) siden (**) svarer til (*) med $a = 0 = b$.

b) Legg merke til at $v_t = u_t$, $v_{xx} = v_{xx}$, $v(0,t) = u(0,t) - a$ og $v(1,t) = u(1,t) - b$. Siden u oppfyller (*), ser vi at v må oppfylle (**).

Randverdiproblemet (**) er løst i Kreyszig, se der for detaljer i utregningen. Innsetting av $v(x,y) = F(x)G(t)$ i (**) gir

$$\begin{aligned} &G'(t) = kG(t) \quad \text{for } t > 0, \\ &F''(t) = kF(t) \quad \text{for } 0 < x < 1, \\ &F(0) = 0 = F(1), \end{aligned}$$

der k er en konstant. Likningene for F har bare løsning forskjellig fra 0 når $k = -n^2\pi^2$ for $n \in \mathbb{N}$, og da er

$$F_n(x) = K_n \sin(n\pi x) \quad \text{og} \quad G_n(t) = C_n e^{-n^2\pi^2 t},$$

for vilkårlige konstanter K_n, C_n. Alle løsninger på formen $v(x,y) = F(x)G(t)$ er da gitt ved

$$v_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = \underline{A_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}},$$

og der $A_n = K_nC_n$ er en vilkårlig konstant.

c) Husk at $a = -1$ og $b = 1$, slik at $u(x,t) = v(x,t) - [-1 + 2x]$. Vi ser da at v løser randverdiproblemet (**) med initialbetingelse

$$v(x,0) = u(x,0) + [-1+2x] = \sin(\pi x) + [-1+2x]. \tag{1}$$

Fra b) og superposisjon har vi følgende kandidat til løsning av (**) og (1),

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Ved å sette $t = 0$ får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = v(x,0) = \sin \pi x + [-1+2x]. \tag{2}$$

Nå finner vi Fourier sin-rekken til $-1 + 2x$ for $0 \leq x \leq 1$:

$$-1 + 2x = \sum_{n=1}^{n} b_n \sin(n\pi x) \quad \text{for} \quad 0 < x < 1 \quad \text{og} \quad b_n = 2\int_0^1 (-1+2x)\sin(n\pi x)\,dx.$$

Delvis integrasjon gir at $b_n = \frac{2}{n\pi}(1 + (-1)^n)$ for $n \in \mathbb{N}$, og fra (2) ser vi dermed at må vi velge

$$A_1 = b_1 + 1 \quad \text{og} \quad A_n = b_n \text{ for } n > 1.$$

Dvs. løsningen v av (**) og (1) er

$$v(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} e^{-4m^2\pi^2 t} \sin(2m\pi x).$$

Her har vi brukt at $b_n = 0$ for n odde og $b_n = \frac{4}{n\pi}$ for $n\,(= 2m)$ like. Løsningen u av (*) og (***) er da

$$u(x,t) = v(x,t) - [-1 - 2x].$$