Eksamen TMA4120 Matematikk 4K, august 2007
Løsningsforslag

Oppgave 1 Vi Laplacetransformerer ligningen:

$$s^2Y - sY - 6Y = 100\left(\frac{1}{s^2+1} - e^{-s\pi/2}\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{100}{s^2+1}(1-e^{-s\pi/2}).$$

Vi løser denne med hensyn på $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{100}{(s^2-s-6)(s^2+1)}(1-e^{-s\pi/2}) = \frac{100}{(s-3)(s+2)(s^2+1)}(1-e^{-s\pi/2}).$$

For å sammenligne med det gitte svaret, setter vi de tre brøkene i det gitte svaret på felles brøkstrek. Nevneren stemmer da, og telleren blir

$$2(s+2)(s^2+1) - 4(s-3)(s^2+1) + (2s-14)(s-3)(s+2) = 100.$$

Derved har vi vist uttrykket for $Y(s)$.

La

$$G(s) = \frac{2}{s-3} - \frac{4}{s+2} + \frac{2s-14}{s^2+1}.$$

Da er

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G)(t) = 2e^{3t} - 4e^{-2t} + 2\cos t - 14\sin t$$

og

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(G(s)e^{-s\pi/2}) &= g(t-\pi/2)u(t-\pi/2)\\ &= \left[2e^{3t-3\pi/2} - 4e^{-2t+\pi} + 2\cos(t-\pi/2) - 14\sin(t-\pi/2)\right]u(t-\pi/2)\end{aligned}$$

der

$$\cos(t-\pi/2) = \sin t \quad \text{og} \quad \sin(t-\pi/2) = -\cos t.$$

Derfor:

$$y(t) = 2e^{3t} - 4e^{-2t} + 2\cos t - 14\sin t + [2e^{3t-3\pi/2} - 4e^{-2t+\pi} + 2\sin t + 14\cos t]u(t-\pi/2).$$

Oppgave 2

a) Fouriersinusrekken til $f(x)$ er $\sin \pi x$. (Riktig form og riktige verdier.)

Fouriercosinusrekken til $f(x)$ har formen $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$ der

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{1}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sin \pi x \, dx = \left[\frac{-\cos \pi x}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi} \\ a_1 &= \frac{2}{1}\int_0^1 \sin \pi x \, \cos \pi x \, dx = \int_0^1 \sin 2\pi x \, dx = 0, \end{aligned}$$

og for $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(x) \cos n\pi x \, dx = 2\int_0^1 \sin \pi x \, \cos n\pi x \, dx \\ &= \int_0^1 (\sin(1-n)\pi x + \sin(1+n)\pi x) dx = \left[\frac{-\cos(1-n)\pi x}{(1-n)\pi} - \frac{\cos(1+n)\pi x}{(1+n)\pi}\right]_0^1 \\ &= \left[\frac{(-1)^{n+1}-1}{(n-1)\pi} - \frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+1)\pi}\right] = \frac{2((-1)^{n+1}-1)}{(n^2-1)\pi} = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ odde} \\ \frac{-4}{(n^2-1)\pi} & \text{for } n \text{ like.} \end{cases} \end{aligned}$$

Fouriercosinusrekken for $f(x)$ er derved

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4\cos 2\pi x}{(2^2-1)\pi} - \frac{4\cos 4\pi x}{(4^2-1)\pi} - \frac{4\cos 6\pi x}{(6^2-1)\pi} - \cdots = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{4n^2-1}.$$

b) Vi søker først løsninger på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$. De må tilfredsstille

$$\begin{aligned} F''G + FG'' &= FG \\ \frac{F''}{F} = 1 - \frac{G''}{G} &= k \end{aligned}$$

som gir to ordinære diffligninger. Randbetingelsene holder når $F'(0) = 0$ og $F'(1) = 0$. Vi løser derfor først randverdiproblemet

$$F'' = kF, \quad F'(0) = 0, \quad F'(1) = 0.$$

For $k > 0$ er den generelle løsningen $F(x) = A\, e^{\sqrt{k}x} + B\, e^{-\sqrt{k}x}$, og derved $F'(x) = \sqrt{k}(A\, e^{\sqrt{k}x} - B\, e^{-\sqrt{k}x})$. Derfor er $F'(0) = F'(1) = 0$ bare når $A = B = 0$.

For $k = 0$ er den generelle løsningen $F(x) = A + Bx$, og derved $F'(x) = B$. Randkravet gir at $B = 0$, slik at $F_0(x) = A$ er en ikke-triviell løsning av randverdiproblemet.

For $k < 0$ er den generelle løsningen $F(x) = A\cos\sqrt{|k|}x + B\sin\sqrt{|k|}x$, og derved $F'(x) = \sqrt{|k|}(-A\sin\sqrt{|k|}x + B\cos\sqrt{|k|}x)$. Kravet $F'(0) = 0$ gir at $B = 0$. Kravet $F'(1) = 0$ gir at $\sqrt{|k|}(-A\sin\sqrt{|k|}) = 0$ som inntreffer dersom $A = 0$ eller $\sin\sqrt{|k|} = 0$.

$A = 0$ gir bare den trivielle null-løsningen. $\sin\sqrt{|k|} = 0$ for $\sqrt{|k|} = n\pi$ for $n = 1, 2, 3, \dots,$ det vil si for $k = -n^2\pi^2$. Løsningene er da $F_n(x) = A_n \cos n\pi x$ for $n = 1, 2, 3, \dots$.

Ligningen for $G(y)$ har formen $G'' = (1 - k)G = (1 + n^2\pi^2)G$ som har den generelle løsningen

$$G_n(y) = B_n e^{\sqrt{1+n^2\pi^2}y} + C_n e^{-\sqrt{1+n^2\pi^2}y} \quad \text{for } \ n = 1, 2, 3, \dots.$$

Derved har vi følgende produktløsninger:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= A_0 e^y + B_0 e^{-y}, \\ u_n(x, y) &= \left(A_n e^{\sqrt{1+n^2\pi^2}y} + B_n e^{-\sqrt{1+n^2\pi^2}y}\right) \cos n\pi x \ \text{ for } \ n = 1, 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

c) Superposisjonsprinsippet sier at

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = A_0 e^y + B_0 e^{-y} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{\sqrt{1+n^2\pi^2}y} + B_n e^{-\sqrt{1+n^2\pi^2}y}\right) \cos n\pi x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n e^{\sqrt{1+n^2\pi^2}y} + B_n e^{-\sqrt{1+n^2\pi^2}y}\right) \cos n\pi x \end{aligned}$$

er en løsning av randverdiproblemet i b). Den skal også tilfredsstille $u(x, 0) = 0$ og $u(x, 1) = \sin \pi x$. Vi har

$$u(x, 0) = A_0 + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n + B_n\right) \cos n\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n + B_n\right) \cos n\pi x = 0$$

bare når $B_n = -A_n$ for alle $n \geq 0$. Derved må

$$u(x, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (e^{\sqrt{1+n^2\pi^2}} - e^{-\sqrt{1+n^2\pi^2}}) \cos n\pi x = \sin \pi x,$$

noe som bare holder når $A_n(e^{\sqrt{1+n^2\pi^2}} - e^{-\sqrt{1+n^2\pi^2}}) = a_n$ for alle n, der a_n er koeffisientene i Fouriercosinusrekken til $f(x) = \sin \pi x$. Altså:

$$A_n = \frac{a_n}{e^{\sqrt{1+n^2\pi^2}} - e^{-\sqrt{1+n^2\pi^2}}} = \frac{2a_n}{\sinh\sqrt{1 + n^2\pi^2}}.$$

Løsningen er derfor

$$\begin{aligned} &\frac{2 \sinh y}{\pi \sinh 1} - \frac{(4 \sinh \sqrt{1 + 2^2\pi^2}\, y) \cos 2\pi x}{(2^2 - 1)\pi \sinh \sqrt{1 + 2^2\pi^2}} \\ &\quad - \frac{(2 \sinh \sqrt{1 + 4^2\pi^2}\, y) \cos 4\pi x}{(4^2 - 1)\pi \sinh \sqrt{1 + 4^2\pi^2}} - \frac{(4 \sinh \sqrt{1 + 6^2\pi^2}\, y) \cos 6\pi x}{(6^2 - 1)\pi \sinh \sqrt{1 + 6^2\pi^2}} - \dots \\ = &\frac{2 \sinh y}{\pi \sinh 1} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sinh \sqrt{1 + 4n^2\pi^2}\, y) \cos 2n\pi x}{(4n^2 - 1) \sinh \sqrt{1 + 4n^2\pi^2}}. \end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Nevneren har nullpunkter i $(2 \pm \sqrt{3})i$. Integranden har poler av orden 1 i disse to punktene. Bare polen $(2-\sqrt{3})i$ ligger innenfor kurven C. Residyet til $f(z)$ i denne polen er

$$\operatorname{Res}_{z=(2-\sqrt{3})i} f(z) = \frac{1}{2z-4i}\bigg|_{z=(2-\sqrt{3})i} = -\frac{1}{2\sqrt{3}i}.$$

Ved residyteoremet er derfor

$$\oint_C \frac{dz}{z^2-4iz-1} = 2\pi i\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}i}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

b) På grunn av periodisiteten til integranden, gjelder

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\sin\theta} = 2\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\sin\theta}.$$

Vi bruker substitusjonen $z = e^{i\theta}$ i dette integralet. Siden

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i} \quad \text{og} \quad dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta,$$

gir det

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\sin\theta} = 2\oint_C \frac{dz/(iz)}{2-\frac{z-1/z}{2i}} = -4\oint_C \frac{dz}{z^2-4iz-1}$$

der C er enhetsirkelen (sirkelen om origo med radius 1). Ved svaret i a) er derfor

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\sin\theta} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{3}.$$

Oppgave 4 Laurentrekken konvergerer mot $f(z)$ for $|2z| > 1$, det vil si for $|z| > \frac{1}{2}$. Derfor er

$$\begin{aligned} f(2) &= \sum_{n=-\infty}^{2} (2^n-1)2^n = (2^2-1)2^2 + (2^1-1)2^1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)\frac{1}{2^n} \\ &= 12+2+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 14 + \frac{1}{1-1/4} - \frac{1}{1-1/2} = 14 + \frac{4}{3} - 2 = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Faktisk er

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{2} (2^n-1)z^n = \sum_{n=-2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-2}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n - \sum_{n=-2}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \frac{(1/2z)^{-2}}{1-1/2z} - \frac{(1/z)^{-2}}{1-1/z} = \frac{8z^3}{2z-1} - \frac{z^3}{z-1} \end{aligned}$$

for $|z| > \frac{1}{2}$. Siden f er analytisk i hele det komplekse planet unntatt i de enkle polene, er f entydig bestemt ved dette uttrykket for alle z forskjellig fra 0, $\frac{1}{2}$ og 1. Derfor er $f(1/4) = \frac{8(\frac{1}{4})^3}{\frac{1}{2}-1} - \frac{(\frac{1}{4})^3}{\frac{1}{4}-1} = -\frac{11}{48}$.