



Fagleg kontakt under eksamen:

Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48

Espen R. Jakobsen tlf. 73 59 35 12

## EKSAMEN I TMA4120 MATEMATIKK 4K

Nynorsk

Mandag 13. August 2007

kl. 9–13

Hjelpemiddel (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)

Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 3.9.2007

*Grunngi alle svar. Det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten framgår tydeleg av besvarelsen.*

**Oppgåve 1** La  $y(t)$  vere løysinga av initialverdiproblemet

$$y'' - y' - 6y = 100 \left( \sin t - u(t - \pi/2) \sin(t - \pi/2) \right), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

der  $u(t)$  er Heavisidefunksjonen (einings-trappedefunksjonen, the unit step function).

Vis at den Laplacetransformerte av  $y(t)$  er gitt ved

$$Y(s) = \left( \frac{2}{s-3} - \frac{4}{s+2} + \frac{2s-14}{s^2+1} \right) \left( 1 - e^{-s\pi/2} \right).$$

Finn løysinga  $y(t)$  av initialverdiproblemet gitt ovanfor.

**Oppgave 2**

- a) Finn Fouriersinusrekka og finn Fouriercosinusrekka til funksjonen

$$f(x) = \sin \pi x \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1.$$

- b) Finn alle løysingar på forma
- $u(x, y) = F(x)G(y)$
- av randverdiproblemet

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$(2) \quad u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0 \quad \text{for } 0 < y < 1.$$

- c) Finn den løysinga av randverdiproblemet i b) som og tilfredsstillar krava

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = \sin \pi x \quad \text{for } 0 < x < 1.$$

**Oppgave 3**

- a) Rekn ut integralet

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 - 4iz - 1}$$

der  $C$  er einingssirkelen  $|z| = 1$  i positiv omløpsretning (orientert mot klokka).

- b) Rekn ut det reelle integralet

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \sin \theta}.$$

NB! Legg merke til integrasjonsgrensene.

**Oppgave 4** Funksjonen  $f(z)$  er analytisk for alle  $z$  bortsett frå i nokre enkle polar. Ei av Laurentrekke til  $f(z)$  om  $z = 0$  er rekka gitt ved

$$\sum_{n=-\infty}^2 (2^n - 1)z^n.$$

Rekn ut  $f(2)$  og  $f(1/4)$ .

**Table of Laplace transforms**

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n$ ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$