Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Espen R. Jakobsen tlf. 73 59 35 12

EKSAMEN I TMA4120 MATEMATIKK 4K

Nynorsk
Dag ??. august 2008
kl. 9–13

Hjelpemiddel (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: ??.??.2008

Grungje alle svar. Det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten framgår tydeleg av besvarelsen.

Oppgåve 1 Bruk Laplacetransformen til å løyse differensiallikninga

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \frac{1}{4}\,\delta(t - 2004), \qquad t > 0,$$

med initialverdiane $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

Oppgåve 2 Ein funksjon $f(x)$ definert for $x \in [0, 2]$ er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1 - \frac{x}{2}, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Finn dei 3 første ledda i Fourier sinusrekka til f.

Skisser summen til Fourier sinusrekka til $f(x)$.

Oppgåve 3

a) Finn alle nullpunkt $z \in \mathbb{C}$ til funksjonen

$$f(z) = \cos z - 1.$$

b) La $g(z)$ vere funksjonen

$$g(z) = \frac{\sin z}{\cos z - 1}.$$

I denne oppgåva kan du gå ut i frå at alle singularitetane til $g(z)$ er polar av orden ein.

La C_1 og C_2 vere sirklane $|z - \pi| = 2$ og $|z - \pi| = 4$ med orientering mot klokka. Finn verdiane av integrala

$$\oint_{C_1} g(z)dz \qquad \text{og} \qquad \oint_{C_2} g(z)dz.$$

Hint: Grenseverdiar som gir $\frac{0}{0}$-uttrykk kan reknast ut ved hjelp av l'Hopitals regel.

Oppgåve 4 Gitt ei partiell differensiallikning

$$u_{xx}(x, y) + 4u_{yy}(x, y) = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \tag{1}$$

med Neumann randkrav

$$u_x(0, y) = 0 = u_x(1, y), \qquad 0 < y < 1, \tag{2}$$
$$u_y(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < 1. \tag{3}$$

a) Finn alle løysingar på forma $u(x, y) = F(x)G(y)$ av randverdiproblemet (1), (2), (3).

b) Finn ei løysing av (1) – (3) som og løyser Neumann randkravet

$$u_y(x, 1) = 3\cos(2\pi x) - \cos(3\pi x), \qquad 0 < x < 1. \tag{4}$$

Kan du finne ei løysing $u(x, y)$ av (1) – (4) slik at $u(0, 0) = 0$?

Oppgåve 5 For alle $a > 0$, la R_a vere rektangelet i det komplekse plan med hjørne $(-a, a)$, $(1, a)$, $(1, -a)$, $(-a, -a)$ og la S_a^h, S_a^v, $S_a^ø$ og S_a^n vere høgre, venstre, øvre og nedre sidekant i R_a.

La $t \geq 0$. Det blir oppgitt at

$$\lim_{a\to\infty} \int_{S_a^v} \frac{e^{zt}}{z^2} dz = 0.$$

Vis at

$$\lim_{a\to\infty} \int_{S_a^n} \frac{e^{zt}}{z^2} dz = 0 = \lim_{a\to\infty} \int_{S_a^ø} \frac{e^{zt}}{z^2} dz,$$

og rekn ut

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{S_a^h} \frac{1}{z^2} e^{zt} dz.$$

Oppgåve 6 La funksjonen $f(z)$ vere analytisk i eit domene D. Vis at $f(z)$ er konstant i D dersom $|f(z)|$ er konstant i D.

Hint: Cauchy-Riemann likningane.

Table of Laplace transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$