Eksamen TMA4120 Matematikk 4K, august 2008
Løsningsforslag

Oppgave 1 Vi Laplacetranformerer likningen:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2[sY(s) - y(0)] + Y(s) = \frac{1}{4}\mathcal{L}[\delta(t-2004)].$$

Så bruker vi at $\mathcal{L}[\delta(t-2004)] = e^{-2004s}$, $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$, og løser for $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}\Big[1 + \frac{1}{4}e^{-2004s}\Big].$$

Her har vi også brukt at $s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2$. Til slutt inverstransformerer vi. Ved første og andre forskyvningslov (s og t-shift) samt $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}] = t$ finner vi at

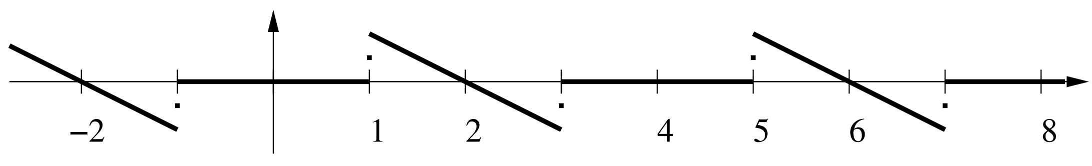
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s+1)^2}\Big] + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s+1)^2}e^{-2004s}\Big] = \underline{te^{-t} + \frac{1}{4}(t-2004)e^{-(t-2004)}u(t-2004).}$$

Oppgave 2 Fouriersinusrekken til $f(x)$ har formen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{2}$ der

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_1^2 (1-\frac{x}{2})\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \Big[(1-\frac{x}{2})\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{-1}{2}\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2\pi^2}\Big[\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\Big] = \begin{cases} (-1)^m \frac{2}{(2m-1)^2\pi^2}, & n = 2m-1, \\ (-1)^m \frac{1}{2m\pi}, & n = 2m. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dermed er de tre første leddene i Fourierrekka $\underline{\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}}$, $\underline{-\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{2}}$, $\underline{-\frac{2}{9\pi^2}\sin\frac{3\pi x}{2}}$.

Summen av Fourier sinusrekka er lik den odde periodiske utvidelsen av $f(x)$ til $\mathbb{R}$:



Oppgave 3

a) Vi bruker definisjonen av $\cos z$ og 2. kvadratsetning:

$$0 = \cos z - 1 = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) - 1 = \frac{1}{2}e^{-iz}(e^{iz} - 1)^2.$$

Siden $e^{-iz} \neq 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$, må $e^{iz} = 1$. Med $z = x + iy$ får vi at

$$e^{i(x+iy)} = e^{ix}e^{-y} = 1 \qquad \text{dvs. } y = 0 \text{ og } x = 2k\pi \qquad \text{eller} \qquad \underline{z = 2k\pi \ \text{ for alle } k \in \mathbb{Z}}.$$

b) Singularitetene til $g(z)$ er nullpunktene til nevneren $\cos z - 1$, dvs $z = k2\pi$ for alle $k \in \mathbb{Z}$. Siden sirkelen C_1 ikke omslutter noen singulariteter, følger det av Cauchys integralteorem at

$$\underline{\oint_{C_1} g(z)\, dz = 0.}$$

Sirkelen C_2 omslutter singularitetene $z_0 = 0$ og $z_1 = 2\pi$, og dermed følger det av Residyteoremet at

$$\oint_{C_2} g(z)\, dz = 2\pi i \Big[\operatorname*{Res}_{z=0} g(z) + \operatorname*{Res}_{z=2\pi} g(z)\Big].$$

Siden singularitetene er første ordens poler, er

$$\operatorname*{Res}_{z=0} g(z) = \lim_{z\to 0} zg(z) \underset{l'Hopital}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\sin z + z\cos z}{-\sin z} \underset{l'Hopital}{=} \lim_{z\to 0} \frac{2\cos z - z\sin z}{-\cos z} = -2,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2\pi} g(z) = \lim_{z\to 2\pi} (z - 2\pi)g(z) \underset{2\times l'Hopital}{=} \lim_{z\to 2\pi} \frac{2\cos z - (z - 2\pi)\sin z}{-\cos z} = -2,$$

og dermed blir

$$\underline{\oint_{C_2} g(z)\, dz = -8\pi i.}$$

Oppgave 4

a) Likning (1) og $u = F(x)G(y)$ gir $F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$. Divisjon med FG gir

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} = \text{konstant} = k,$$

eller

$$F''(x) - kF(x) = 0, \tag{5}$$

$$G''(y) + kG(y) = 0. \tag{6}$$

Fra $0 = u_x(0, y) = F'(0)G(y)$ og $0 = u_x(1, y) = F'(1)G(y)$, har vi $G \equiv 0$ (gir $u \equiv 0$) eller

$$F'(0) = 0 = F'(1). \tag{7}$$

Mens $0 = u_y(x,0) = F(x)G'(0)$ gir $F \equiv 0$ og dermed $u \equiv 0$, eller

$$G'(0) = 0. \tag{8}$$

Vi løser (5) og (7) for F. Løsningen av (5) avhenger av fortegn til k:

- $k = 0$: $F_0(x) = A_0 + B_0 x$ og (7) gir $0 = F_0'(0) = F_0'(1) = B_0$, dvs. $F_0(x) = A_0$.
- $k = c^2 > 0$: $F(x) = Ae^c x + Be^{-cx}$ og (7) gir

$$cA - cB = 0 \qquad \text{og} \qquad cAe^1 - cBe^{-1} = 0,$$

  og dermed må $A = B = 0$ som gir $F \equiv 0$ og dermed $u \equiv 0$.
- $k = -c^2 < 0$: $F(x) = A\cos(cx) + B\sin(cx)$ og (7) gir

$$-cA\sin 0 + cB\cos 0 = 0 \qquad \text{og} \qquad -cA\sin c + cB\cos c = 0,$$

  dvs. $B = 0$ og $A\sin c = 0$. Hvis $A = 0$ blir $F \equiv 0$ og $u \equiv 0$, ellers må $c = n\pi$:

$$F_n(x) = A_n\cos(n\pi x), \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Nå løser vi (6) og (8) for G, men kun for k som gir $F \not\equiv 0$, dvs $k = -n^2\pi^2$, $n = 0,1,2,\ldots$:

- $n = 0$: $G_0(y) = C_0 + D_0 y$ og (8) gir at $0 = G_0'(0) = D_0$, dvs $G_0(y) = C_0$.
- $n = 1,2,3,\ldots$: $G_n(y) = C_n e^{n\pi y} + D_n e^{-n\pi y}$ og (8) gir $0 = G_n'(0) = n\pi C_n - n\pi D_n$ og

$$G_n(y) = 2C_n\cosh(n\pi y), \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Konlusjon: Alle løsninger på formen $F(x)G(y)$ av (1), (2) og (3) er gitt ved

$$\underline{u_n(x,y) = F_n(x)G_n(y) = \tilde{A}_n\cos(n\pi x)\cosh(n\pi y), \quad n = 0,1,2,3,\ldots}$$

der $\tilde{A}_0 = A_0C_0$ og $\tilde{A}_n = 2A_nC_n$, $n = 1,2,3,\ldots$.

b) Det ser ut som om $u = u_2 + u_3$ (u_2, u_3 definert i a)) kan oppfylle (4) ved rett valg av konstanter. Siden

$$u_y(x,y) = \tilde{A}_2 2\pi\sinh(2\pi y)\cos(2\pi x) + \tilde{A}_3 3\pi\sinh(3\pi y)\cos(3\pi x),$$

vil (4) være oppfylt hvis $\tilde{A}_2$ og $\tilde{A}_3$ velges slik at

$$3\cos(2\pi x) - \cos(3\pi x) = \tilde{A}_2 2\pi\sinh(2\pi)\cos(2\pi x) + \tilde{A}_3 3\pi\sinh(3\pi)\cos(3\pi x),$$

dvs. at

$$\underline{u(x,y) = 3\frac{\cosh(2\pi y)}{2\pi\sinh(2\pi)}\cos(2\pi x) - \frac{\cosh(3\pi y)}{3\pi\sinh(3\pi)}\cos(3\pi x).}$$

Denne funksjonen u oppfyller også (1) (pga. superposisjonsprinsippet), og randbetingelsene (2) og (3) (siden de holder for hvert ledd).

Det er lett å se at $u + u_0 = u + A_0$ også løser (1) – (4) for en vilkårlig konstant A_0, dermed vil $\underline{v(x,y) = u(x,y) - u(0,0)}$ løse (1) – (4) og tilleggsbetingelsen $v(0,0) = 0$.

<u>Alternativ:</u> Sett $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ og bestem koeffisienter slik at (4) og $u(0,0) = 0$ er oppfylt.

Oppgave 5 Sidekantene S_a^n og $S_a^ø$ er gitt av likningene $y = -a$, $-a \le x \le 1$ og $y = a$, $-a \le x \le 1$ henholdsvis. I begge tilfellene er $y^2 = a^2$ og $x \le 1$. La S være enten S_a^n eller $S_a^ø$. Lengden til S er $L = a + 1$ og hvis $z = x + iy \in S$ vil

$$|e^{zt}| = |e^{xt}||e^{iyt}| = e^{xt} \le e^t, \ (t \ge 0) \qquad \text{og} \qquad \frac{1}{|z^2|} = \frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$$

ML-ulikheten gir da

$$\left| \int_S \frac{1}{z^2} e^{zt} dz \right| \le \max_{z \in S} \frac{|e^{zt}|}{|z^2|} L \le \frac{e^t}{a^2}(a+1) \to 0 \text{ når } a \to \infty.$$

Legg merke til at

$$\int_{S_a^h} \frac{1}{z^2} e^{zt} dz = \oint_{R_a} \frac{1}{z^2} e^{zt} dz - \Big(\int_{S_a^v} + \int_{S_a^ø} + \int_{S_a^n} \Big) \frac{1}{z^2} e^{zt} dz.$$

De tre siste integralene går mot null når $a \to \infty$ mens det første integralet kan regnes ut vha. residyteoremet. Siden integranden har en eneste singularitet, en andre ordens pol i $z = 0$, blir

$$\oint_{R_a} \frac{1}{z^2} e^{zt} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{zt}}{z^2} = 2\pi i \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{e^{zt}}{z^2} \right) = 2\pi i t.$$

Dermed blir

$$\underline{\lim_{a \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{S_a^h} \frac{1}{z^2} e^{zt} dz = t.}$$

<u>Obs:</u> Vi har nå regnet ut invers Laplace transform $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{1}{s^2} e^{st} ds$.

Oppgave 6 La $z = x + iy \in D$. Hvis $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, er $u(x,y)^2 + v(x,y)^2 = |f(z)|^2 = \text{konst}$. Deriver mhp. x og y:

$$2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \text{og} \qquad 2uu_y + 2vv_y = 0.$$

Multipliser første likning med u_x og andre med u_y og adder:

$$2u(u_x^2 + u_y^2) = -2v(v_x u_x + v_y u_y).$$

Cauchy Riemann likningene $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ medfører at høyresiden er null, slik at enten er $u = 0$ eller så er $u_x^2 + u_y^2 = 0$. Siden dette gjelder for alle punkt $z = x + iy \in D$, må

$$uu_x = 0 = uu_y \text{ i } D \qquad \text{og dermed er} \qquad u^2 = \text{konstant i } D$$

(alternativt ville kontinuitet av u, u_x, u_y gitt $u_x = 0 = u_y$ i D og dermed u konstant). Siden u er konstant, gir Cauchy-Riemann likningene at $v_y = 0 = v_x$ i D og dermed er også v konstant i D. Dermed er f konstant i D.