K9 12.4:11

(*) $u_{xy} - u_{yy} = 0$

$A = 0,\ B = \frac{1}{2},\ C = -1 \Rightarrow AC - B^2 = -1 < 0$

$\Rightarrow$ (*) hyperbolsk

Karakteristikker:

$$A(y')^2 - 2By' + C = 0$$

Obs: • Hyperbolske likn. har 2 distinkte karakteristikker, så A må være $\neq 0$!

• For å få det til kaller vi x for y og y for x og får den ekvivalente likningen

(**) $-u_{xx} + u_{xy} = 0$

Karakteristikker for (**):

$$-(y')^2 - y' = 0 \rightarrow y'(y'+1) = 0$$

dvs $y_1(x) = \text{konst.}$, $y_2(x) = -x + \text{konst.}$

Karakteristikker: $y - y_1(x) = \text{konst.}$ eller $y = \text{konst.}$

$y - y_2(x) = \text{konst}$ eller $y - x = \text{konst}$

Nye variable:

$$r(x,y) = y$$
$$s(x,y) = y - x$$

Def.: $v(r,s) = v(y, y-x) = u(x,y)$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v = \Big(v_r \underset{0}{\underset{\shortparallel}{r_x}} + v_s \underset{-1}{\underset{\shortparallel}{s_x}}\Big)_x = -v_{sr} \cdot \underset{0}{\underset{\shortparallel}{r_x}} - v_{ss} \underset{-1}{\underset{\shortparallel}{s_x}} = v_{ss}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v = \Big(v_r \underset{0}{\underset{\shortparallel}{r_x}} + v_s \underset{1}{\underset{\shortparallel}{s_x}}\Big)_y = v_{sr} \underset{1}{\underset{\shortparallel}{r_y}} + v_{ss} \underset{1}{\underset{\shortparallel}{s_y}}$$

$$= v_{sr} + v_{ss}$$

$$\boxed{0 = u_{xx} - u_{xy} = v_{ss} - (v_{sr} + v_{ss}) = v_{rs}}$$

Kommentarer:

Løsning: $v(r,s) \overset{2\times \text{ integrasjon}}{=} \varphi(r) + \psi(s)$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = v(y, y-x) = \varphi(y) + \psi(y-x)}$$

"Initialverdiproblem":

$$\begin{cases} -u_{xx} + u_{xy} = 0 & x > 0,\ y \in \mathbb{R} \\ u(2y, y) = f(y) & x = 2y,\ y \in \mathbb{R} \\ 2u_x(2y,y) + u_y(2y,y) = 0 & x = 2y,\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sjekk: $\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2}[f(y) + f(y-x)]}$