Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

15. juni 2003

EKSAMENSOPPGAVER FOR TMA4120 MATEMATIKK 4K H-03
Del A: Laplacetransformasjon, Fourieranalyse og PDL

Oppgave A-1

a) La $f(x)$ være definert for $0 \le x \le \pi$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{når } 0 \le x < \pi/2, \\ -1 & \text{når } \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Finn Fourier-cosinusrekken til $f(x)$ i intervallet $0 \le x \le \pi$.

b) Gitt den partielle differenssialligningen

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0,$$

med randbetingelser

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \qquad t \ge 0.$$

Finn alle løsninger av (1) og (2) som er av formen $u(x,t) = F(x)G(t)$.

c) Angi en løsning av (1) og (2) som oppfyller initialbetingelsen

(3) $$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le \pi,$$

der $f(x)$ er funksjonen definert i a).

Bestem til slutt en løsning av (1) og (2) som istedenfor (3) oppfyller initialbetingelsen

$$u(x,0) = \sin^2 x, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

Oppgave A-2

Bruk Laplacetransformasjonen til å løse initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

der δ betegner deltafunksjonen.

Oppgave A-3

Bruk tabell til å vise at funksjonen $xe^{-ax^2}(a > 0)$ har Fouriertransformert:

(1) $$\mathcal{F}(xe^{-ax^2}) = -\frac{iw}{(2a)^{3/2}}\, e^{-w^2/4a}\,.$$

Bruk så (1) og tabell til å bestemme funksjonen f når

$$xe^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\, e^{-2(x-v)^2}\, dv\,.$$

Oppgave A-4

a) Finn $f(t)$ og $g(t)$ når deres Laplacetransformerte er

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = \frac{1}{s}e^{-s}, \qquad \mathcal{L}(g) = G(s) = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s}).$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + y = g(t) - \delta(t-1), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

der g er definert i **a)** og δ betegner deltafunksjonen.

c) Bestem $x(t)$ av integralligningen

$$\int_0^t [x(u) - f(u)]x(t-u)\, du = g(t)$$

der f og g er funksjonene definert i a).

Oppgave A-5

a) La $f(x)$ være definert for $0 \le x \le \pi$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } 0 \le x < \pi/2, \\ \pi - x & \text{når } \pi/2 < x \le \pi. \end{cases}$$

Finn Fourier-sinusrekken til $f(x)$ i intervallet $0 \le x \le \pi$.

b) Angi summen av sinusrekken i a) for $x = \pi/2$ og for $x = -3\pi/4$.

Finn summen av rekken

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\,.$$

Oppgave A-6

La g være en to ganger deriverbar funksjon, sett

$$f(x) = g''(x)$$

og anta at $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$ og at $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx < \infty$ slik at de Fouriertransformerte av $f(x)$ og $g(x)$ eksisterer. Vi søker en løsning av den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0$$

slik at

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,y) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0$$

og

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x).$$

a) Overfør problemet ved hjelp av Fouriertransformasjonen til en ordinær differensialligning og løs denne.

b) Vis at løsningen på problemet kan skrives på formen

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-p)h(p,y)\,dp \quad \text{ for } y > 0$$

og finn funksjonen $h(p,y)$.

Oppgave A-7

Løs følgende ligning ved hjelp av Laplacetransformasjonen:

$$y'(t) + \int_0^t e^u\, y(t-u)\,du - y(t) = 5e^t - 4t,$$

hvor $y(0) = 1$ og $t \geq 0$.

Oppgave A-8

a) Finn de løsninger av den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

som kan skrives på formen

$$u(x,t) = F(x)G(t),$$

og som tilfredsstiller randkravene

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{for } t > 0.$$

b) Finn en løsning fra a) som også tilfredsstiller kravet

$$u(x,1) = \sin x - 3\sin 3x.$$

Oppgave A-9

Gitt den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

hvor $-\infty < x < +\infty$ og $t > 0$ og randbetingelsene

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} \quad \text{for } k = 1,2,3$$

og

$$\lim_{t\to+\infty} |u(x,t)| < \infty.$$

a) Benytt Fouriertransformasjonen til å overføre den gitte ligning til en ordinær differensi
ning og løs denne. Forklar bruken av randbetingelsene.

b) Finn en løsning $u(x,t)$ som tilfredsstiller kravet $u(x,0) = f(x)$, hvor $f(x)$ er en passend
funksjon. Uttrykk løsningen så enkelt som mulig ved et konvolusjonsintegral

c) Regn ut Fouriertransformasjonene til $e^{-|x|}$ og $(2-x^2)e^{-x^2/2}$.

d) Vis at

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u|} e^{-(x-u)^2/2}\,du$$

er en løsning av den inhomogene ligningen

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2(2-x^2)e^{-x^2/2}.$$

Oppgave A-10

Løs initialverdiproblemet

$$f'(t) = e^{2t}\sin t + \int_0^t e^{2u}(\cos u + 2\sin u)f(t-u)\,du, \qquad t \geq 0$$
$$f(0) = 0$$

ved hjelp av Laplacetransformasjonen.

Oppgave A-11

Beregn Fourierintegralet for funksjonen

$$f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|} \quad \text{for } -\infty < x < \infty$$

og begrunn at det eksisterer og konvergerer mot $f(x)$ for alle x.

Bruk resultatet til å vise at

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Det oppgis at Fourierintegralet til en funksjon $f(x)$ kan skrives som

$$\int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\; dw$$

der

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv, \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\,dv.$$

Oppgave A-12

a) Finn alle funksjoner av typen

$$u(x,t) = F(x)G(t), \qquad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le t \le 1$$

som tilfredsstiller den partielle differensialligningen

(∗) $$u_{xx} - 4u_x + u = u_t, \qquad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le t \le 1$$

og randbetingelsene

(∗∗) $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{for } 0 \le t \le 1.$$

b) Finn løsningen $u(x,t)$ av (∗) og (∗∗) som også tilfredsstiller initialbetingelsen

$$u(x,0) = 2e^{2x}\sin x\cos x \qquad \text{for } 0 \le x \le \pi.$$

c) Finn løsningen $u(x,t)$ av (∗) og (∗∗) som også tilfredsstiller initialbetingelsen

$$u(x,0) = xe^{2x} \qquad \text{for } 0 \le x \le \pi.$$

Oppgave A-13

a) La $r(t)$ være trappefunksjonen definert ved

$$r(t) = n+1 \quad \text{for } n < t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tegn grafen til $r(t)$ og uttrykk $r(t)$ ved enhetsprangfunksjoner (unit step functions) $u(t-n)$. Finn den Laplacetransformerte $R(s) = \mathcal{L}(r)$ som en geometrisk rekke. For hvilke s konvergerer rekken, og hva blir summen?

b) Finn den inverse Laplacetransformerte $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}e^{-ns}\right\}$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$

Benytt svaret til å finne løsningen av initialverdiproblemet

$$x' + x = r(t), \quad x(0) = 1$$

som en uendelig rekke. (Funksjonen $r(t)$ er definert i a).)

Oppgave A-14

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = x(\pi - x) \quad \text{for } 0 \le x \le \pi.$$

Finn Fouriercosinusrekken til $f(x)$ i det gitte intervallet.

b) Finn alle løsninger på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ av randverdiproblemet

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{for } 0 \le x \le \pi,\ y \ge 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0 & \text{for } y > 0. \end{cases}$$

c) Finn en (formell) løsning av (∗) på formen $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)G_n(y)$ som oppfyller

$$u(x,0) = x(\pi - x) \quad \text{for } 0 \le x \le \pi.$$

Finn også en løsning av (∗) som oppfyller

$$u(x,0) = 2\cos x\cos 3x \quad \text{for } 0 \le x \le \pi.$$

Oppgave A-15

a) La a være en positiv konstant. Finn den inverse Fouriertransformerte til

$$e^{-a|w|}.$$

b) Gitt den todimensjonale Laplaceligningen

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{for } -\infty < x < \infty,\ y \ge 0$$

med tilleggsbetingelser

(2) $$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,y) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0$$

La $\widehat{u}(w,y)$ være den Fouriertransformerte av $u(x,y)$ med hensyn på x. Bruk Fouriert
formasjonen til å finne en ordinær differensialligning for $\widehat{u}(w,y)$ og løs denne.

c) Anta at $u(x,y)$ i tillegg til (1) og (2) også oppfyller

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0 \quad \text{og} \quad u(x,0) = f(x),$$

der f er en gitt funksjon som kan Fouriertransformeres.

Vis at $u(x,y)$ kan skrives på formen

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^2+y^2} \quad \text{for } y>0.$$

Oppgave A-16

a) Bestem

$$\mathcal{L}(t\sin t), \quad \mathcal{L}(t\cos t) \quad \text{og} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+s^2)^2}\right\}$$

ved å bruke formler for Laplacetransformasjonen i formelsamlingen.

b) Finn ved hjelp av Laplacetransformasjonen de løsninger av differensialligningen

$$tx'' - 2x' + tx = 0$$

som tilfredsstiller $x(0) = 0$.

Oppgave A-17

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{for } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{for } 0 \le x < \pi; \end{cases}$$

som antas å være periodisk med periode 2π. Finn Fourier-rekken til $f(x)$.

b) Funksjonen $g(x)$ er også periodisk med periode 2π og

$$g(x) = \begin{cases} -\pi e^{x} & \text{for } -\pi < x < 0, \\ \pi e^{-x} & \text{for } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

Det oppgis at $g(x)$ har Fourier-rekke

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}\left(1-(-1)^n e^{-\pi}\right)\sin nx.$$

Hva er summen av rekken $(*)$ for $x=\pi/2$ og for $x=3\pi/2$?

Finn også summen av rekken

$$\frac{1}{1^2+1} - \frac{3}{3^2+1} + \frac{5}{5^2+1} - \frac{7}{7^2+1} + \cdots.$$

Oppgave A-18

Gitt den partielle differensialligningen

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} + 6u + y^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

a) Finn de løsninger på formen

$$u(x,y) = F(x)G(y)$$

som tilfredsstiller kravene

$$(*) \qquad u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \quad \text{for } y>0.$$

b) Finn en løsning av (1) som i tillegg til $(*)$ oppfyller

$$u(x,1) = e^{-2x}\sin^3 x.$$

(Oppgitt formel: $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.)

Oppgave A-19

Det oppgis at Fourierintegralet til en funksjon $f(x)$ kan skrives som

$$\int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\,dw$$

der

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\,dx \quad \text{og} \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx.$$

Bestem funksjonene $A(w)$ og $B(w)$ for funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x<0, \\ e^{-x} & \text{for } x>0. \end{cases}$$

Bruk resultatet til å finne verdien av integralene

$$\int_0^\infty \frac{\cos w}{1+w^2}\,dw \quad \text{og} \quad \int_0^\infty \frac{w\sin w}{1+w^2}\,dw.$$

Oppgave A-20

La $f(x)$ være en odde funksjon som oppfyller

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{for } x>1. \end{cases}$$

a) Finn den Fouriertransformerte av $f(x)$.

b) Bruk den inverse Fouriertransformasjonen til å beregne integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos t)\sin t}{t}\, dt.$$

Oppgave A-21

Gitt den partielle differensialligningen

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} + 3u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0.$$

a) Finn alle løsninger av $(*)$ som kan skrives på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ og som oppfyller randbetingelsene

$$\text{(i)} \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \ge 0.$$

b) Finn en løsning av $(*)$ som i tillegg til (i) også oppfyller initialbetingelsene

$$\text{(ii)} \qquad u(x,0) = e^{-2x}(\sin x - 2\sin 3x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

Oppgave A-22

La $u(x,y)$ være en løsning av

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + u, \qquad -\infty < x < \infty,\ y \ge 0,$$

som oppfyller $u(x,0) = f(x)$ for alle x. Anta at $u(x,y)$ kan Fouriertransformeres med hensyn på x, og at

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,y) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Vis at $u(x,y)$ kan skrives på formen

$$u(x,y) = \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2t\sqrt{y})\, h(t)\, dt$$

og finn funksjonen $h(t)$.

Oppgave A-23

La $0 < a < \pi$ og la $f(x)$ være en like funksjon med periode 2π som oppfyller

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } 0 \le x \le a, \\ 0 & \text{hvis } a < x \le \pi. \end{cases}$$

a) Vis at Fourierrekken til $f(x)$ er

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \cos nx.$$

b) Finn summen av rekkene

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}, \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2na}{2n}.$$

Oppgave A-24

Finn $f(x)$ av ligningen

$$e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2(x-u)^2}\, du.$$

Oppgave A-25

Gitt den partielle differensialligningen

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0.$$

a) Finn alle løsninger av $(*)$ som kan skrives på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ og som opp
betingelsene

$$\text{(i)} \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \ge 0.$$

b) Finn en løsning av $(*)$ som i tillegg til (i) også oppfyller betingelsen

$$\text{(ii)} \qquad u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

Oppgave A-26

Gitt et system av ordinære differensialligninger

$$\begin{aligned} y_1'' + 2y_1 - y_2 &= f(t) \\ y_2'' + 2y_2 - y_1 &= -f(t) \end{aligned}$$

der

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{hvis } t > 1 \end{cases}$$

og $y_i(0) = y_i'(0) = 0$ for $i = 1, 2$.

a) Vis at

$$Y_1(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s^2 + 3)}$$

der $Y_1(s) = \mathcal{L}[y_1(t)]$.

b) Finn $y_1(t)$ og $y_2(t)$.

Oppgave A-27

a) La $f(x)$ være funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{for } -2 \le x \le 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn den Fouriertransformerte av $f(x)$.

b) Bruk resultatet fra a) til å beregne

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 w}{w^2}\, dw.$$

Oppgave A-28

Gitt den partielle differensialligningen

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

der $0 \le x \le \pi$ og $t \ge 0$.

a) Finn alle løsninger av $(*)$ på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller

$$\text{(i)} \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{for alle } t \ge 0.$$

b) Finn den løsningen av $(*)$ som i tillegg til (i) også er slik at Fourierrekken til $u(x,0)e^{-x}$ er gitt ved

$$\text{(ii)} \qquad u(x,0)e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)x$$

for $0 \le x \le \pi$.

Oppgave A-29

a) Finn Fourierrekken til den funksjonen med periode 2π som er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{for } -\pi < x \le 0, \\ 0 & \text{for } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

b) Bruk resultatet fra a) til å finne summen av rekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

c) La $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ være Fourierrekken fra a). Skisser den kontinuerlige sjonen som har

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

som sin Fourierrekke. Det er nok å skissere funksjonen for $-2\pi \le x \le 2\pi$.

Oppgave A-30

Gitt den partielle differensialligningen

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

der c er en positiv konstant.

a) Finn alle løsninger av (1) på formen

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

som tilfredsstiller randkravene

$$(2) \qquad u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \text{ for } t > 0$$

der L er en positiv konstant.

b) Finn løsningen u av (1) og (2) som også tilfredsstiller initialbetingelsene

$$u(x,0) = \sin\frac{\pi}{2L}x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin\frac{3\pi}{2L}x, \quad x \in [0,L].$$

Oppgave A-31
La funksjonen g være definert ved

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le -\pi, \\ \pi + x & \text{for } -\pi < x \le 0, \\ \pi - x & \text{for } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{for } x \ge \pi. \end{cases}$$

a) Finn den Fouriertransformerte, $\widehat{g}$, til g.

b) Bruk resultatet til å beregne integralet

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos \pi w}{w^2}\, dw.$$

Oppgave A-32
La h være definert ved $h(t) = t^2 + t$ for $t \in (-\pi, \pi]$ og $h(t + 2\pi) = h(t)$ for $t \in \mathbf{R}$.

a) Skisser funksjonen h for alle $t \in \mathbf{R}$.

b) Finn Fourierrekken til h.

c) Bestem summen av Fourierrekken for alle $t \in \mathbf{R}$.

d) Finn summen av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^2} \right).$$

Oppgave A-33
La funksjonen f_α være definert ved

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha & \text{for } t \in [1, 1 + 1/\alpha], \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

der α er positiv konstant.

a) Finn den Laplacetransformerte, $\mathcal{L}(f_\alpha)$, til f_α.

b) Løs differensialligningen

$$(*) \begin{cases} y'' + y = f_\alpha, \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$

der f_α er funksjonen ovenfor.

c) Løsningen y av differensialligningen $(*)$ vil avhenge av parameteren α.
Finn $\varphi(t) = \lim_{\alpha \to \infty} y(t)$. Hvilken differensialligning vil φ tilfredsstille?

Oppgave A-34

a) Finn $\mathcal{L}(te^{-t} \sin 2t)$.

b) Finn $\mathcal{L}\left\{(t + b)u(t - a)\right\}$ og $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{(s+b)^2}\right\}$ der a og b er positive konstanter.

c) Bruk Laplacetransformasjonen til å finne funksjonen $y(t)$ når

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e^\tau y(t - \tau)\, d\tau + t$$

for alle $t \ge 0$.

Oppgave A-35
Løs den partielle differensialligningen

$$(*) \qquad t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

der $-\infty < x < \infty$ og $t \ge 0$, under betingelsene

$$\text{(i)} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

$$\text{(ii)} \qquad u(x,0) = f(x)$$

der $f(x)$ er en funksjon som har en Fouriertransformert.
Vis at svaret kan skrives på formen

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - st) g(s)\, ds$$

der funksjonen $g(s)$ skal bestemmes.

Oppgave A-36
Funksjonen $f(x) = \pi - \frac{x}{2}$, $0 < x < \pi$, er gitt.

a) Finn sinusrekken til funksjonen $f(x)$.

b) La for alle x, $S(x)$ betegne summen av sinusrekken til $f(x)$ i a).
Hva blir $S\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ og $S\left(\frac{5\pi}{4}\right)$?
Skisser grafen til $S(x)$ i det lukkede intervallet $[-2\pi, +2\pi]$.

Gitt den partielle differensialligningen

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u + 4\frac{\partial u}{\partial t}, \quad t \geq 0$$

med randkrav

$$(**) \qquad u(0,t) = 0 = u(\pi,t), \quad t \geq 0.$$

c) Finn alle løsningene av $(*)$ på formen

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

som også tilfredsstiller $(**)$, og bestem en løsning av $(*)$ som tilfredsstiller $(**)$ og initialbetingelsen

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \pi,\ t \geq 0.$$

Oppgave A-37

Bruk Laplacetransformasjonen til å finne $f(t)$ når

$$f(t) = e^{-t} - 2\int_0^t \cos(t-u)f(u)\,du$$

for alle $t \geq 0$.

Oppgave A-38

a) Finn Fouriercosinusrekka til funksjonen $f(x) = \cosh x,\ 0 \leq x \leq \pi$.
(Husk at $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ og $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.)

b) Bruk resultatet i a) til å vise at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{2\sinh\pi}.$$

c) Hvor mange *ledd* må vi ta med i rekka i b) for å beregne summen med feil mindre enn $0,004$?

d) Finn alle løsninger av

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq \pi,\ t > 0,$$

på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller

$$\text{(i)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad t > 0.$$

e) Finn den løsningen av $(*)$ som i tillegg til (i) også oppfyller

$$\text{(ii)} \qquad u(x,1) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

der $f(x)$ er som i a).

Oppgave A-39

a) Finn $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+2)}\right\}$ og $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{s(s^2+2)}\right\}$.

b) Gitt et system av differensialligninger

$$\begin{aligned} x'' + x - y &= r(t) \\ y'' + y - x &= -r(t) \end{aligned}$$

der

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{når } 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{når } t > 3 \end{cases}$$

og $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$.
Finn $x(t)$ og $y(t)$.

Oppgave A-40

a) La $f(x) = x(\pi - x)$ for $0 \leq x \leq \pi$. Hva blir Fourier-sinusrekken til $f(x)$? Du kan bru
Fourier-sinusrekken til x^2 for $0 \leq x < \pi$ er

$$2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{2m-1} - \frac{4}{\pi^2(2m-1)^3} \right] \sin(2m-1)x - \frac{1}{2m}\sin 2mx \right\}.$$

b) Finn alle løsninger av Laplaces ligning

$$(1) \qquad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ som tilfredsstiller

$$(2) \qquad u(x,0) = u(0,y) = u(\pi,y) = 0.$$

c) Bestem en løsning av (1) og (2) som oppfyller

$$(3) \qquad u(x,\pi) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

der $f(x)$ er funksjonen definert i a).

Oppgave A-41

a) Finn Fouriertransformasjonen til funksjonen

$$f(x) = e^{-|x|}\cos x.$$

b) Bruk resultatet fra a) til å finne verdien av integralet

$$\int_0^\infty \frac{w^2+2}{w^4+4}\cos w\, dw.$$

Oppgave A-42

La f være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \pi/2), \\ 0, & x \in [\pi/2, \pi). \end{cases}$$

La g betegne den odde, periodiske utvidelsen av f med periode 2π, og la h være den like, periodiske utvidelsen av f med periode 2π.

a) Skisser g og h på intervallet $(-3\pi, 3\pi]$. (Merk av enhetene på aksene.)

b) Finn Fourierrekken til h.

La G og H betegne summen av Fourierrekkene til henholdsvis g og h.

c) Bestem G og H i punktene $x = -\pi/4$, $x = 0$ og $x = \pi/2$.

d) Finn summen av rekkene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)^2-1} \qquad \text{og} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2-1}.$$

e) Finn alle løsninger u av randverdiproblemet

$$(*) \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u, \quad x \in [0,\pi] \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \end{cases}$$

på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$.

f) Bestem løsningen av $(*)$ som tilfredsstiller initialbetingelsene

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0$$

der f er funksjonen gitt i begynnelsen av oppgaven.

Oppgave A-43

a) Finn Fouriertransformasjonen til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{for } |x| \le 1 \\ 0 & \text{for } |x| > 1. \end{cases}$$

b) Bruk resultatet fra a) til å finne verdien av integralet

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt.$$

(Hint: $1 - \cos w = 2\sin^2 w/2$)

Oppgave A-44

La a være en positiv konstant. Funksjonene f_a og g_a er definert ved

$$f_a(t) = e^{at} \quad \text{for } t > 0 \qquad \text{og} \qquad g_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < a, \\ e^{at} & \text{for } a < t. \end{cases}$$

a) Finn de Laplacetransformerte $\mathcal{L}\{f_a\}$ og $\mathcal{L}\{g_a\}$, og beregn $(f_a * g_a)(t)$.

b) Bruk Laplacetransformasjonen til å finne en løsning av integralligningen

$$y(t) - \int_0^t e^u y(t-u)\, du = \int_0^t g_2(u) e^{t-u}\, du$$

der g_2 er funksjonen g_a for $a = 2$.

Oppgave A-45

a) Finn Fourier-sinusrekken til funksjonen $f(x) = 1$ på intervallet $[0, \pi]$.

b) Differensialligningen

(i) $$u_{xx} + 2u_x + u = tu_t$$

er gitt for $0 < x < \pi$, $t \ge 1$. Finn alle funksjoner av formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ tilfredsstiller (i) og randbetingelsen

(ii) $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{for } t \ge 1.$$

c) Finn en formell løsning av (i) og (ii) som tilfredsstiller initialbetingelsen

(iii) $$u(x,1) = e^{-x} \quad \text{for } 0 < x < \pi.$$

Oppgave A-46

a) Finn de Fouriertransformerte til funksjonene

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases} \qquad \text{og} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x > 0 \\ e^{x} & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

b) Bruk Fouriertransformasjonen til å vise at $f * g = \frac{1}{2}(f+g)$.

Beregn integralet $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(aw)}{1+w^2}\,dw$ der a er et reelt tall.

Oppgave A-47

a) Finn $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+\omega^2}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right\}$ og $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-as}}{s^2+\omega^2}\right\}$ når $\omega > 0$, $a \geq 0$.

b) Løs initialverdiproblemet:

$$y'' + 4y = r(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

der $r(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{når } t > 1 \end{cases}$

c) Skisser grafen til $y(t)$ når

$$y'' + 4y = \delta(t-\pi), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Oppgave A-48

Funksjonen $f(x) = \pi$, $0 < x < 1$, er gitt. Beregn koeffisientene i Fourier-sinusrekken til $f(x)$ og skriv opp rekken. Skisser også grafen til rekkens sum i det lukkede intervallet $[-2, 2]$.

Oppgave A-49

Gitt en sirkulær skive med radius 1 og sentrum i origo. Temperaturen i et punkt på skiven med polarkoordinater (r,θ) betegnes $u(r,\theta)$. Den kontinuerlige funksjonen $u(r,\theta)$ er løsning av ligningen

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (0 < r < 1,\ -\infty < \theta < \infty)$$

og oppfyller (selvsagt) betingelsen

(2) $$u(r, \theta + 2\pi) = u(r,\theta).$$

a) La $p \geq 0$ og bestem alle løsninger av (1) på formen $u(r,\theta) = r^p G(\theta)$. Hvilke av disse løsningene tilfredsstiller (2)?

b) (Kan besvares uavhengig av pkt. a)) La $f(\theta)$ være en funksjon med periode 2π gitt ve

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\pi < \theta < 0 \\ 1 & \text{for } 0 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \text{for } \pi/2 < \theta < \pi. \end{cases}$$

Finn Fourierrekken til $f(\theta)$.

c) Temperaturen på randen av sirkelskiven, $u(1,\theta)$, er gitt ved

$$u(1,\theta) = f(\theta).$$

Finn på rekkeform et uttrykk for temperaturen i et vilkårlig punkt (r,θ) på sirkelskive

Oppgave A-50

Bruk Fouriertransformasjonen til å finne $f(x)$ når

$$e^{-ax^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-b(x-u)^2}\,du, \quad b > a > 0.$$

Oppgave A-51

a) Finn den inverse Laplacetransformerte til funksjonen

$$F(s) = e^{-as}\frac{1}{(s+b)^2}.$$

b) Bruk Laplacetransformasjonen til å finne en løsning av initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\dot{x} + x &= \delta(t-1) - \delta(t-2) \\ x(0) &= 2 \\ \dot{x}(0) &= 2. \end{aligned}$$

Oppgave A-52

a) Finn alle funksjoner av formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ i rektanglet $0 < x < a$, $0 < y < b$ tilfredsstiller

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ u_x(0,y) = u_x(a,y) = u(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

b) Finn den funksjonen, som i tillegg til betingelsene under punkt a, tilfredsstiller

$$u(x,b) = \cos\frac{\pi x}{a} + \cos\frac{2\pi x}{a}.$$

Oppgave A-53

a) Finn Fourier-cosinusrekken til funksjonen $f(x) = e^{-x}$ på intervallet $[0, \pi]$.

b) Skisser summen av rekken i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

c) Evaluer rekken for $x = 0$ og $x = \pi$ og bruk dette til å beregne summen av rekkene

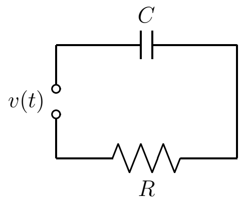
$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \qquad \text{og} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

Oppgave A-54

Strømmen $i(t)$ tilfredsstiller ligningen

$$R\,i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = v(t), \quad 0 \le t < \infty,$$

der $v(t) = 0$ når $0 \le t < 5$, $v(t) = 17$ når $5 \le t < 10$, og $v(t) = 0$ når $t \ge 10$.



a) Finn Laplacetransformasjonen

$$I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}.$$

b) Bestem $i(t)$. Beregn $i(2)$, $i(7)$ og $i(11)$.

Oppgave A-55

Bestem på kompleks form Fourierrekken til $f(x) = e^{-|x|}$ for $-\pi < x \le \pi$ der $f(x)$ er periodisk med periode 2π.

Oppgave A-56

a) Løs integralligningen

$$y(t) = (t+1)e^t - 2e^t \int_0^t e^{-\tau} y(\tau)\,d\tau.$$

b) Funksjonen f er definert ved

$$f(t) = \begin{cases} 8\sin t & \text{for } 0 \le t \le \pi, \\ 0 & \text{for } t > \pi. \end{cases}$$

Løs differensialligningen

$$y'' + 9y = f(t)$$

med initialverdier $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Oppgave A-57

Funksjonen $u(x, y)$ er definert for $0 \le x \le \pi$, $y \ge 0$. Den tilfredsstiller differensialligningen

$$\text{(1)} \qquad u_{xxy} - u = 0 \quad \text{for } 0 \le x \le \pi,\ y \ge 0$$

og randvilkårene

$$\text{(2)} \qquad u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \text{for } y \ge 0.$$

a) Finn først alle funksjoner $u(x, y)$ på formen $u(x, y) = F(x)G(y)$ som tilfredsstiller (1) o

b) Finn deretter en funksjon $u(x, y)$ som tilfredsstiller (1), (2) og initialvilkåret

$$\text{(3)} \qquad u(x, 0) = \sin x + \sin 2x \quad \text{for } 0 \le x \le \pi.$$

c) Finn tilslutt en formell rekke $u(x, y)$ som tilfredsstiller (1), (2) og initialvilkåret

$$\text{(4)} \qquad u_y(x, 0) = 1 \quad \text{for } 0 < x < \pi.$$

Oppgave A-58

a) Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } a < x < b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

der a, b er konstanter, $0 < a < b$. Regn ut den Fouriertransformerte av $f(x)$. Uttrykk dernest den inverse Fouriertransformasjonen ved $f(x)$.

b) Bruk resultatet i a) til å finne verdien av integralene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-iwa}}{w}\,dw \qquad \text{og} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin aw}{w}\,dw.$$

Oppgave A-59

Gitt følgende partielle differensialligning

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty,\ t \ge 0$$

med randkravene

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x, t) = \lim_{x \to \pm\infty} u_x(x, t) = 0$$

Vis at en løsning som oppfyller initialbetingelsen

$$u(x, 0) = 0$$

er gitt på formen

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2/4} g(s,t) \cos sx \, ds.$$

Funksjonen $g(s,t)$ skal bestemmes.

$\big($ Husk at differensialligningen $dy/dt + ay = b$, a og b konstanter, $a \neq 0$, har generell løsning $y = Ce^{-at} + b/a.$ $\big)$

Oppgave A-60

Løs følgende system av differensialligninger

$$\begin{aligned} y_1' + y_1 + y_2 &= \delta(t-1) \\ y_2' + 3y_1 - y_2 &= 0 \end{aligned}$$

med initialbetingelse $y_1(0) = 0$ og $y_2(0) = -1$.

Oppgave A-61

La funksjonen f være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} (\pi - a)x & \text{for } x \leq a \\ (\pi - x)a & \text{for } x > a \end{cases}$$

når $x \in [0, \pi]$ og a er en gitt konstant i intervallet $(0, \pi)$.

a) Bestem Fourier-sinusrekken til f. Hva er summen av Fourier-sinusrekken til f i $x = a$?

b) Sett $a = 1$. Hva er summen av Fourier-sinusrekken til f i $x = 100$?

c) Bruk Parsevals teorem (også kalt Parsevals identitet) til å bestemme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^4}.$$

Oppgave A-62

a) La g være en funksjon med Fouriertransformert $\widehat{g}(\omega)$. Vis at

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{g} e^{-\alpha\omega^2}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-(x-y)^2/4\alpha} \, dy$$

b) Anta at u tilfredsstiller initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + F(x,t) \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

der $|u| \to 0$ og $|u_x| \to 0$ når $|x| \to \infty$. La f og F være slik at de Fouriertransfor eksisterer. Vis at den Fouriertransformerte $\widehat{u}$ oppfyller

$$\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega) e^{-\omega^2 t} + \int_0^t \widehat{F}(\omega,\tau) e^{-\omega^2(t-\tau)} \, d\tau.$$

c) Vis at u kan skrives som

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) f(y) \, dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t-\tau) F(y,\tau) \, dy \, d\tau$$

der

$$G(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$

Oppgave A-63

a) Bestem en løsning på formen $v(x,t) = Ax + B$ av randverdiproblemet

$$(*) \begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v_x(0,t) = K_1 \\ v(\pi,t) = K_2 \end{cases}$$

der K_1 og K_2 er gitte reelle tall.

La u og v være vilkårlige løsninger av $(*)$. Vis at da vil $w = u - v$ tilfredsstille

$$\begin{aligned} w_t &= w_{xx} \\ w_x(0,t) &= w(\pi,t) = 0. \end{aligned}$$

b) Finn løsningen $u(x,t)$ av

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \\ u_x(0,t) &= 1 \\ u(\pi,t) &= 3\pi \\ u(x,0) &= x + 2\pi + \cos(x/2) - \cos(3x/2). \end{aligned}$$

Oppgave A-64

a) Funksjonen $f(x)$ er definert for $0 \leq x \leq \pi$ ved
$$f(x) = x^2 - \pi x.$$
Det oppgis at
$$\int_0^\pi f(x) \sin n\,x\,dx = \frac{2}{n^3}(1 - \cos n\pi) \qquad \text{for } n = 1,\, 2,\, \ldots.$$
Skriv opp Fourier-sinusrekken til $f(x)$.

b) Funksjonen $u(x,t)$ tilfredsstiller differensialligningen

(1) $$u_t + tu - u_{xx} = 0$$

for $0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0$. Finn alle løsninger på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som også tilfredsstiller randvilkårene

(2) $$u(0,t) = 0,\; u(\pi,t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0.$$

c) Finn en løsning av (1) og (2) som tilfredsstiller initialvilkåret

(3) $$u(x,0) = f(x) - \frac{8}{\pi}\sin x \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi,$$

der $f(x)$ er funksjonen definert i punkt a).

Oppgave A-65

Gitt funksjonen $f(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0$

a) Regn ut den Fouriertransformerte av f konvolusjon med seg selv (dvs. $\mathcal{F}(f * f)$).

b) Bruk resultatet i a) til å finne verdien av
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-u)^2} \cdot e^{-au^2}\,du$$
for alle $x \in \mathbf{R}$.

Oppgave A-66

a) Bestem Fourier-sinusrekka til $f(x) = x$ for $x \in [0,\pi]$.

b) Finn alle løsninger på form $u(x,y) = F(x)G(y)$ av
$$(*) \begin{cases} u_{xx} - 2u_x + u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = 0, \quad x \in [0,\pi] \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \quad y \in [0,\pi\rangle \end{cases}$$

c) Bestem løsningen av $(*)$ som oppfyller
$$u(x,\pi) = xe^x.$$

Oppgave A-67

La $x = x(t)$ og $y = y(t)$ løse
$$\begin{aligned} x'' - x + 5y' &= t \\ y'' - 4y - 2x' &= 2 \end{aligned}$$
med initialbetingelse $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$.

a) Vis at $X = \mathcal{L}(x)$ og $Y = \mathcal{L}(y)$ kan skrives på formen
$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{s^2} + \frac{8}{3(s^2+4)} - \frac{5}{3(s^2+1)} \\ Y &= \frac{2s}{(s^2+4)(s^2+1)}. \end{aligned}$$

b) Bestem løsningen $x = x(t)$ og $y = y(t)$.

Oppgave A-68

Bruk Fouriertransform til å vise
$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{\omega^2 + a^2}\,d\omega = e^{-a|x|}$$
for alle $x \in \mathbf{R}$ og $a > 0$.

Fasit

A-1 **a)** $\displaystyle \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos{(2n+1)x}$

b) $u_n(x,t) = A_n e^{-n^2 t}\cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

c) $\displaystyle u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} e^{-(2n+1)^2 t} \cos{(2n+1)x}$

$\displaystyle u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4t}\cos 2x$

A-2 $y(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t) - e^{\pi}e^{-t}\sin t \cdot u(t-\pi)$

A-3 $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}\, xe^{-2x^2}$

A-4 a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 1, \\ 1 & \text{for } t \geq 1, \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} t & \text{for } t < 1 \\ 1 & \text{for } t \geq 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} t - \sin t & \text{for } t < 1 \\ 1 - \sin t & \text{for } t \geq 1 \end{cases}$

c) $x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{for } t < 1 \\ 0 & \text{for } t \geq 1 \end{cases}$

A-5 a) $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin x}{1^2} - \dfrac{\sin 2x}{2} - \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin 3x}{3^2} + \dfrac{\sin 4x}{4} + \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin 5x}{5^2} - - + + \cdots$

$= \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\left[\frac{2}{\pi}\frac{\sin(2m-1)x}{(2m-1)^2} - \frac{\sin 2mx}{2m}\right]$

b) $\pi/4, \quad -\pi/4, \quad \pi^2/8$

A-6 a) $\widehat{u}(w,y) = \widehat{g}(w)e^{-w^2 y}$

b) $h(p,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi y}}\, e^{-p^2/4y}$

A-7 $y = e^t(\cos t + 3\sin t) + 2t$

A-8 a) $u_n(x,t) = A_n t^{n^2} \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots$

b) $u(x,t) = t\sin x - 3t^9 \sin 3x$

A-9 a) $U(w,t) = B(w)e^{-(w^2+1)t}$

b) $u(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-(x-u)^2/4t}\, du$

c) $\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \dfrac{1}{w^2+1}$

$\mathcal{F}\left\{(2 - x^2)e^{-x^2/2}\right\} = (w^2+1)e^{-w^2/2}$

A-10 $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}$

A-11 $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^2}\, dw$

A-12 a) $u_n(x,t) = B_n e^{2x} \sin nx\, e^{-(n^2+3)t}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $u(x,t) = e^{2x} \sin 2x\, e^{-7t}$

c) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}e^{2x} \sin nx\, e^{-(n^2+3)t}$

A-13 a) $r(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u(t-n), \qquad R(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{s}e^{-ns} = \frac{1}{s(1-e^{-s})} \quad \text{for } s > 0$

b) $\left[1 - e^{-(t-n)}\right] u(t-n), \qquad x(t) = r(t) - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(t-n)}u(t-n)$

A-14 a) $\dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2mx}{m^2}$

b) $u_n(x,y) = C_n e^{-n^2y^2/2} \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

c) $u(x,y) = \dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2mx}{m^2}e^{-2m^2y^2}$

$u(x,y) = e^{-2y^2}\cos 2x + e^{-8y^2}\cos 4x$

A-15 a) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \dfrac{a}{x^2+a^2}$

b) $\widehat{u}(w,y) = A(w)e^{|w|y} + B(w)e^{-|w|y}$

A-16 a) $\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}, \quad \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}, \quad \dfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$

b) $x(t) = C(\sin t - t\cos t)$

A-17 a) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$

b) $\pi e^{-\pi/2}, \quad -\pi e^{-\pi/2}, \quad \dfrac{\pi}{2}\dfrac{e^{-\pi/2}}{1+e^{-\pi}}$

A-18 a) $u_n(x,y) = C_n e^{-2x} \sin nx \cdot e^{(2-n^2)/y}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $u(x,y) = \frac{3}{4}e^{-1-2x}\sin x \cdot e^{1/y} - \frac{1}{4}e^{7-2x}\sin 3x \cdot e^{-7/y}$

A-19 $A(w) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+w^2}, \quad B(w) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{w}{1+w^2}, \quad \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos w}{1+w^2}\, dw = \int_0^{\infty}\frac{w\sin w}{1+w^2}\, dw = \frac{\pi}{2e}$

A-20 a) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos w - 1}{w}i$

b) $\pi/2$

A-21 a) $u_n(x,t) = \big[A_n \cos\sqrt{n^2+1}\,t + B_n \sin\sqrt{n^2+1}\,t\big]e^{-2x}\sin nx, \quad n = 1,\,2,\,3,\,\ldots$

b) $u(x,t) = e^{-2x}\big[\cos\sqrt{2}\,t\cdot\sin x - 2\cos\sqrt{10}\,t\cdot\sin 3x\big]$

A-22 $h(t) = e^{-t^2}$

A-23 b) i) $\dfrac{\pi - a}{2}$, ii) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{a}{2}$

A-24 $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-2x^2}$

A-25 a) $u_n(x,t) = C_n t^{n^2}\sin nx, \quad n = 1, 2, \cdots$

b) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n^2}}{n^3}\sin nx$

A-26 b) $y_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos\sqrt{3}\,t - u(t-1)\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos\sqrt{3}\,(t-1)\right], \quad y_2 = -y_1$

A-27 a) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos 2w}{w^2}$

b) $\pi/2$

A-28 a) $u_n(x,t) = B_n e^{-(n^2+1)t}e^x \sin nx\,, \quad n = 1,\,2,\,\ldots$

b) $u(x,t) = e^x\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-[(2n+1)^2+1]t}\sin(2n+1)x$

A-29 a) $\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right]$

b) $\pi^2/8, \quad \pi/4$

A-30 a) $u_n(x,t) = \left(A_n\cos\dfrac{(2n-1)\pi ct}{2L} + B_n\sin\dfrac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right)\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}, \qquad n = 1, 2, \ldots$

b) $u(x,t) = \cos\dfrac{\pi ct}{2L}\sin\dfrac{\pi x}{2L} + \dfrac{2L}{3\pi c}\sin\dfrac{3\pi ct}{2L}\sin\dfrac{3\pi x}{2L}$

A-31 a) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos\pi w}{w^2}$

b) $\pi^2/2$

A-32 b) $\dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big[4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt + 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt\Big]$

c) $\begin{cases} h(t) & \text{for } t \neq (2n-1)\pi,\ n \text{ heltall} \\ \pi^2 & \text{for } t = (2n-1)\pi,\ n \text{ heltall} \end{cases}$

d) $\dfrac{2\pi^4}{45} + \dfrac{\pi^2}{6}$

A-33 a) $\dfrac{\alpha e^{-s}}{\alpha}(1 - e^{-s/\alpha})$

b) $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \le 1 \\ \alpha[1 - \cos(t-1)] & \text{for } 1 < t \le 1 + 1/\alpha \\ \alpha[\cos(t-1-1/\alpha) - \cos(t-1)] & \text{for } t > 1 + 1/\alpha \end{cases}$

c) $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \le 1, \\ \sin(t-1) & \text{for } t > 1; \end{cases} \qquad y'' + y = \delta(t-1), \quad y(0) = y'(0) = 0$

A-34 a) $\dfrac{4(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2}$

b) $e^{-as}\Big(\dfrac{a+b}{s} + \dfrac{1}{s^2}\Big), \quad (t-a)e^{-b(t-a)}u(t-a)$

c) $y(t) = t - 1$

A-35 $g(s) = e^{-s^2/2}$

A-36 a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{n}\sin nx$

b) $-7\pi/8, \quad -5\pi/8$

c) $u_n(x,t) = B_n e^{-[(n^2+1)/4]t}\sin nx\,, \quad n = 1,\,2,\,3,\,\ldots$

$u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{n}e^{-[(n^2+1)/4]t}\sin nx$

A-37 $f(t) = e^{-t}(t-1)^2$

A-38 a) $\dfrac{\sinh\pi}{\pi} + \dfrac{2\sinh\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx$

c) 14 (fra restleddsestimat for alternerende rekke)

d) $u_n(x,t) = A_n t^{-n^2}\cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

e) $u(x,t) = \dfrac{\sinh\pi}{\pi} + \dfrac{2\sinh\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}t^{-n^2}\cos nx$

A-39 a) $\frac{1}{2}[1-\cos\sqrt{2}\,t]; \quad \frac{1}{2}[1-\cos\sqrt{2}(t-3)]u(t-3)$

b) $x(t) = \frac{1}{2}[1-\cos\sqrt{2}\,t] - \frac{1}{2}[1-\cos\sqrt{2}(t-3)]u(t-3), \quad y(t) = -x(t)$

A-40 a) $\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2m-1)x}{(2m-1)^3}$

b) $u_n(x,y) = C\sin nx\,\sinh ny, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$

c) $u(x,y) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2m-1)x\,\sinh(2m-1)y}{(2m-1)^3\sinh(2m-1)\pi}$

A-41 a) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{w^2+2}{w^4+4}$

b) $\dfrac{\pi\cos 1}{2e}$

A-42 b) $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{\cos x}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m+1}}{4m^2-1}\cos 2mx$

c) $G(-\pi/4) = -1/\sqrt{2}, \quad G(0) = 0, \quad G(\pi/2) = 0$
$H(-\pi/4) = 1/\sqrt{2}, \quad H(0) = 1, \quad H(\pi/2) = 0$

d) $\dfrac{\pi-2}{4}; \quad \dfrac{1}{2}$

e) $u_0(x,t) = A_0e^t + B_0e^{-t}$
$u_1(x,t) = (A_1 + B_1t)\cos x$
$u_n(x,t) = (A_n\cos\sqrt{n^2-1}\,t + B_n\sin\sqrt{n^2-1}\,t)\cos nx, \quad n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$

f) $u(x,t) = \dfrac{\cosh t}{\pi} + \dfrac{\cos x}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m+1}}{4m^2-1}\cos\sqrt{4m^2-1}\,t\cos 2mx$

A-43 a) $\widehat{f}(w) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{1-\cos w}{w^2}$

b) $\dfrac{\pi}{2}$

A-44 a) $\dfrac{1}{s-a}, \quad e^{-a(s-a)}\dfrac{1}{s-a}; \qquad e^{at}(t-a)u(t-a)$

b) $(f_2 * g_2)(t) = e^{2t}(t-2)u(t-2)$

A-45 a) $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$

b) $u_n(x,t) = e^{-x}\sin nx\cdot t^{-n^2}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

c) $u(x,t) = \dfrac{4}{\pi}e^{-x}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)t^{(2n+1)^2}}$

A-46 a) $\widehat{f}(w) = \dfrac{1-iw}{\sqrt{2\pi}\,(1+w^2)}, \quad \widehat{g}(w) = \dfrac{1+iw}{\sqrt{2\pi}\,(1+w^2)}$

b) $\dfrac{\pi}{2}e^{-|a|}$

A-47 a) $\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t; \quad \dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t); \quad \dfrac{1}{\omega}\sin\omega(t-a)u(t-a)$

b) $\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\big[1-\cos 2(t-1)\big]u(t-1)$

A-48 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{4}{2m-1}\sin(2m-1)\pi x$

A-49 a) $u(r,\theta) = A + B\theta \quad (p = 0) \quad$ og $\quad u(r,\theta) = r^p(A\cos p\theta + B\sin p\theta) \quad (p > 0)$
$u_0(r,\theta) = A_0 \quad$ og $\quad u_n(r,\theta) = r^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta) \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$

b) $a_0 = \dfrac{1}{4}, \quad a_n = \dfrac{\sin(n\pi/2)}{\pi n} = \begin{cases}(-1)^{(n-1)/2}/\pi n & \text{for } n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\\ 0 & \text{for } n = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\end{cases}$

$$b_n = \frac{1-\cos(n\pi/2)}{\pi n} = \begin{cases}1/\pi n & \text{for } n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\\ 2/\pi n & \text{for } n = 2,\ 6,\ 10,\ \ldots\\ 0 & \text{for } n = 4,\ 8,\ 12,\ \ldots\end{cases}$$

$$f(\theta) \sim \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\left[(-1)^m\frac{\cos(2m+1)\theta}{2m+1} + \frac{\sin(2m+1)\theta}{2m+1} + \frac{\sin 2(2m+1)\theta}{2m+1}\right]$$

c) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left\{r^{2m+1}\left[(-1)^m\dfrac{\cos(2m+1)\theta}{2m+1} + \dfrac{\sin(2m+1)\theta}{2m+1}\right] + r^{2(2m+1)}\dfrac{\sin 2(2m+1)\theta}{2m+1}\right.$

A-50 $f(x) = \dfrac{b}{\sqrt{\pi(b-a)}}\,e^{-abx^2/(b-a)}$

A-51 a) $e^{-b(t-a)}(t-a)u(t-a)$

b) $2e^{-t}(t+2) + e^{-(t-1)}(t-1)u(t-1) - e^{-(t-2)}(t-2)u(t-2)$

A-52 a) $u_0(x,y) = B_0 y$ og $u_n(x,y) = B_n \cos\dfrac{n\pi x}{a}\sinh\dfrac{n\pi y}{a} \quad (n = 1, 2, \ldots)$

b) $u(x,y) = \dfrac{\sinh(\pi y/a)}{\sinh(\pi b/a)}\cos\dfrac{\pi x}{a} + \dfrac{\sinh(2\pi y/a)}{\sinh(2\pi b/a)}\cos\dfrac{2\pi x}{a}$

A-53 a) $\dfrac{1}{\pi}\left[1 - e^{-\pi}\right] + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi\cosh\pi}{2\sinh\pi} + \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\sinh\pi} + \frac{1}{2}$

A-54 a) $I(s) = \dfrac{17C}{CRs+1}\left(e^{-5s} - e^{-10s}\right)$

b) $i(t) = \dfrac{17}{R}\left(e^{-(t-5)/RC}u(t-5) - e^{-(t-10)/RC}u(t-10)\right)$

$i(2) = 0, \quad i(7) = (17/R)e^{-2/RC}, \quad i(11) = (17/R)\left(e^{-6/RC} - e^{-1/RC}\right)$

A-55 $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\, e^{inx}$

A-56 a) $y(t) = \cosh t$

b) $y(t) = \begin{cases}\sin t - \frac{1}{3}\sin 3t & \text{for } 0 \le t \le \pi\\ 0 & \text{for } t > \pi\end{cases}$

A-57 a) $u_n(x,y) = A_n e^{-y/n^2}\sin nx \quad (n = 1, 2, \ldots)$

b) $u(x,y) = e^{-y}\sin x + e^{-y/4}\sin 2x$

c) $u(x,y) = -\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)e^{-y/(2m-1)^2}\sin(2m-1)x$

A-58 a) $\widehat{f}(w) = \dfrac{i}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{e^{-ibw} - e^{-iaw}}{w}$

$\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(x-b)w} - e^{i(x-a)w}}{w}\,dw = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

b) $\pi i, \qquad \pi/2$

A-59 $g(s,t) = \dfrac{1 - e^{-s^2 t}}{s^2}$

A-60 $y_1 = \frac{1}{2}\sinh 2t + \frac{1}{4}\left(e^{2(t-1)} + 3e^{-2(t-1)}\right)u(t-1)$

$y_2 = -\frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{3}{2}\sinh 2(t-1)\,u(t-1)$

A-61 a) $2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}\sin nx\,, \qquad (\pi - a)a$

b) $-(\pi-1)(32\pi - 100)$

c) $(\pi - a)^2 a^2/6$

A-63 a) $v(x,t) = K_1 x + K_2 - \pi K_1$

b) $u(x,t) = x + 2\pi + e^{-t/4}\cos(x/2) - e^{-9t/4}\cos(3x/2)$

A-64 a) $\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}\sin(2m+1)x$

b) $u_n(x,t) = B_n e^{-n^2 t - t^2/2}\sin nx \quad (n = 1, 2, \ldots)$

c) $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi}e^{-t^2/2}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}e^{-(2m+1)^2 t}\sin(2m+1)x$

A-65 a) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{e^{-w^2/2a}}{a}$

b) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2a}}\,e^{-ax^2/2}$

A-66 a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx$

b) $u_n(x,y) = A_n e^x \sin nx \sinh(\sqrt{n^2+1}\,y) \quad (n = 1, 2, \ldots)$

c) $u(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\sinh(\sqrt{n^2+1}\,y)}{n\sinh(\sqrt{n^2+1}\,\pi)}e^x\sin nx$

A-67 b) $x = -t - \frac{5}{3}\sin t + \frac{4}{3}\sin 2t$

$y = \frac{2}{3}(\cos t - \cos 2t)$