

Laplace transform

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Egenskaper:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$$

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f] - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = F(s - a)$$

$$\mathcal{L}[f(t - a)u(t - a)](s) = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g],$$

$$\text{hvor } (f * g)(t) = \int_0^t f(t - s)g(s) ds$$

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)](s) = e^{-as}$$

$$\mathcal{L}[u(t - a)](s) = \frac{e^{-as}}{s}$$

Anvendelse:

$$y'' + ay' + by = f, \quad y'(0) = c, \quad y(0) = d$$

$$\rightsquigarrow (\mathcal{L}(s^2 + as + b)Y = F + \dots$$

$$\rightsquigarrow Y = \dots \rightsquigarrow \mathcal{L}^{-1} Y = y$$

solve

Fourier transform

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}[f](w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw x} f(x) dx$$

$$\check{g}(x) = \mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw x} g(w) dw$$

Egenskaper:

$$\mathcal{F}[af(x) + bg(x)] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$$

$$\mathcal{F}[f'](w) = iw\mathcal{F}[f](w)$$

$$\mathcal{F}[f''](w) = -w^2\mathcal{F}[f](w)$$

$$\mathcal{F}[e^{iax}f(x)](w) = \hat{f}(w - a)$$

$$\mathcal{F}[f(x - a)](w) = e^{iaw}\hat{f}(w)$$

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g],$$

$$\text{hvor } (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y) dy$$

$$\mathcal{F}[\delta(t - a)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iwa}$$

$$\text{Fourierintegral: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iw x} dw = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f]$$

Anvendelse:

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u|_{t=0} = f$$

$$\rightsquigarrow \hat{u}_t = -c^2 w^2 \hat{u}, \quad \hat{u}|_{t=0} = \hat{f}$$

$$\rightsquigarrow \hat{u} = \dots \rightsquigarrow \mathcal{F}^{-1} \hat{u} = u$$

solve

Fourierrekker

2L periodisk: $f(x) \sim S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}$

$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$	$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$	$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$	$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx$
--	---	---	--

Konvergens: $S_f(x) = \begin{cases} f(x), & f \text{ kont. i } x \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & f \text{ diskont. i } x \end{cases}$ [f stykkevis kont., h. og v. deriv. eks.]

Parseval: $a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx$

Utvidelser av $f(x)$, $x \in [0, L]$, til $\mathbb{R}$:

Odde 2L periodisk utv.: $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$	Like 2L periodisk utv.: $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$
$h(x) = f(x)$, $x \in [0, L]$ (utv)	$g(x) = f(x)$, $x \in [0, L]$ (utv)
$h(x) = -h(-x)$, $x \in [-L, 0]$ (odde)	$g(x) = g(-x)$, $x \in [-L, 0]$ (like)
$h(x + 2L) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (2L-per)	$g(x + 2L) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (2L-per)

Fourier sinus rekken til $f(x)$, $x \in [0, L]$: (= Fourierrekken til $h(x)$)

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \boxed{a_n = 0} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L h(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Fourier cosinus rekken til $f(x)$, $x \in [0, L]$: (= Fourierrekken til $g(x)$)

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \boxed{b_n = 0} \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

Partielle differensiallikninger

Bølgelikning $u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (t, x) \in D$ (hyperbolsk)

Varmelikning $u_t = c^2 u_{xx}, \quad (t, x) \in D$ (parabolsk)

Laplace likning $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in D$ (elliptisk)

Løsning: Tilstrekkelig deriverbar funksjon u som oppfyller PDL i alle punkt i D .

- Ikke entydig uten tilleggsbetingelser:

Cauchy bet. = initialbet.: Eks. $u(x, t = 0) = f(x)$

Dirichlet randbetingelse: Eks. $u(x = 0, t) = 0, \quad u(x = 1, t) = 3$

Neumann randbetingelse: Eks. $u_x(x = 0, t) = 0 = u_x(x = 1, t)$

Eksempel: Cauchy-Neumann problem

$u_t = c^2 u_{xx}$	$x \in (0, \pi), \quad t > 0$	Løsning:
$u(x, 0) = f(x)$	$x \in (0, \pi)$	$u(x, t) = e^{-c^2 t} \cos(x),$
$u_x(0, t) = 0 = u_x(\pi, t)$	$t > 0$	når $f(x) = \cos(x)$

Superposisjon: Hvis u, v løser lineær homogen PDL, så løser $au + bv$ samme PDL

Løsningsmetoder:

1. Fouriertransform ($x \in \mathbb{R}$), Laplacetransform ($x \in [0, \infty)$)
2. Separasjon av variable + Fourierrekker ($x \in [0, L]$)
3. D'Alembert: Løsn. av bølgelikn. er på formen $\phi(x + ct) + \psi(x - ct)$ [best. ϕ, ψ]

Seperasjon av variable:

1. PDL + homogene tilleggsbetingelser:

Finn alle løsninger på formen $u(x, t) = F(x) \cdot G(t)$;

$$\leadsto u_n = F_n \cdot G_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2. Inhomogene tillegsbetingelser

Superposisjon: $u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$, der u_n er fra 1.

Velg c_n slik at u tilfredstiller inhomogen tilleggsbet. (bruk Fourierrk.)

Inhomogene problem:

$$\begin{cases} Au = f & \text{i } \Omega, \\ u = g & \text{i } \partial\Omega \end{cases} \quad A = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Løsning $u = u_1 + u_2$ hvor

$$\begin{cases} Au_1 = f & \text{i } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{i } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} Au_2 = 0 & \text{i } \Omega, \\ u_2 = g & \text{i } \partial\Omega. \end{cases}$$

Analytiske funksjoner

$f(z)$ **analytisk i** z_0 : $f(z)$ deriverbar i z_0 (+ liten omegn)

$f(z)$ **analytisk i** domene $D \implies \infty$ deriverbar med konvergent Taylorrekke i D

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ analytisk i } D$$



Cauchy-Riemann likningene:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{i } D \quad [u_x, u_y, v_x, v_y \text{ kontinuert}]$$



u og v **konjugerte harmoniske funksjoner**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{og} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{i } D$$

Cauchys integralteorem

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

hvis C enkel, lukka, og
 f analytisk på og innenfor C

Cauchys integralformel

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

hvis C enkel, lukka, mot kl., omslutter z_0 ,
 f analytisk på og innenfor C

Laurentrekker, singulariteter, residyteoremet

Hvis $f(z)$ analytisk på $|z - z_0| < R$ / $r < |z - z_0| < R$ da er (Taylor/Laurents teorem)

Taylorrekke: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \left[a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right] \quad \text{for} \quad |z - z_0| < R$

Laurentrekke: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad \text{for} \quad r < |z - z_0| < R$

Singulariteter: Punkt der $f(z)$ ikke analytisk/definert ...

Isolert singularitet z_1 = eneste singularitet i liten disk:

1. **Orden n pol** z_0 : $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k + \frac{b_1}{z - z_0} + \dots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad 0 < |z - z_0| < R$
2. **Essensiell sing.** z_0 : $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}, \quad 0 < |z - z_0| < R$
3. **Hevbar sing.** z_0 : ...

Residy: $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1$ når

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

z_0 orden n pol: $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} ((z - z_0)^n f(z))^{(n-1)}$

Residyteoremet:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}_{z=z_j} f(z)$$

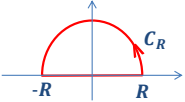
hvis (i) C enkel, lukket, orientert mot kl., og

(ii) f analytisk på og innenfor C utenom $z_1, \dots, z_m$

Resdy integrasjon av reelle integraler

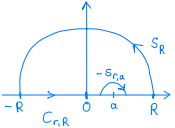
$$1. \quad \boxed{\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta} \quad \underset{z=e^{i\theta}}{=} \oint_{|z|=1} F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz}$$

$$2. \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-R}^R f(x) dx}_{= \oint_{C_R} f(z) dz - \int_{S_R} f(z) dz}$$



$\underbrace{\oint_{C_R} f(z) dz}_{\text{resdyteoremet}} - \underbrace{\int_{S_R} f(z) dz}_{\rightarrow 0 \text{ ved ML-ulikheten}}$

$$3. \quad \boxed{\text{pr.v. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \underbrace{\left(\int_{-R}^{a-r} + \int_{a+r}^R \right) f(x) dx}_{= \oint_{C_{r,R}} f(z) dz - \int_{S_R} f(z) dz - \int_{-S_{r,a}} f(z) dz}$$



$\underbrace{\oint_{C_{r,R}} f(z) dz}_{\text{resdytm.}} - \underbrace{\int_{S_R} f(z) dz}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \text{ (ML)}} - \underbrace{\int_{-S_{r,a}} f(z) dz}_{\xrightarrow{r \rightarrow 0} -\pi i \text{ Res } f(z)_{z=a}}$

$$4. \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iwx} dx} / \boxed{\text{pr.v. } \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iwx} dx}$$

Som i punkt 2 / 3 med $f(x) = g(x) e^{-iwx}$

Må velge $C_R/C_{r,R}$ i det halvplan der $|e^{-iwx}| \leq 1$!