TMA4123 og TMA4125

Midtsemesterprøve, 15. mars 2007, 10:15 – 11:15, rom S3

Oppgave 1. La $z_1 = 1 + 7i$, $z_2 = 1 + 3i$. Realdelen til $\bar{z}_1 z_2^{-1}$ er

a :	-1	**b** :	-2
c :	0	**d** :	2

Oppgave 2. La $f(x) = (\cos x + \sin x)^2 - 1$ og $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ være dens Fourierrekke. Koeffisienten c_{-1} er

a :	-1	**b** :	$+1$
c :	0	**d** :	$1/2$

Oppgave 3. Hvilken av funksjonene under er elementære løsninger for randverdiproblemet:

$$u_{xx} = \frac{1}{2} u_t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0.$$

(her er n et vilkårlig positivt heltall)

a :	$\sin(n + 1/2)x \; e^{-2(n+1/2)^2 t}$	**b** :	$\cos(n + 1/2)x \; e^{-2(n+1/2)^2 t}$
c :	$\sin nx \; e^{-(n+1)^2 t}$	**d** :	$\cos(n + 1/2)x \; e^{-2(n+1)^2 t}$

Oppgave 4. La $u(t, x)$ være løsningen til problemet i forrige oppgave med initialverdier $u(0, x) = \pi - x$, $0 < x < \pi$. For hver x, $0 < x < \pi$ er grensen $\lim_{t \to \infty} u(t, x)$ lik

a :	$\frac{\pi}{2}$	**b** :	$\frac{1}{2}(\pi - x) + 1$
c :	$\frac{1}{2}(\pi - x) - 1$	**d** :	0

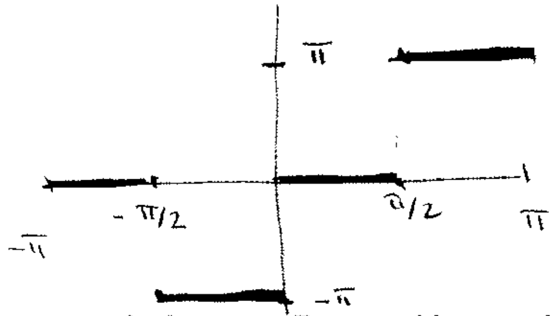
Oppgave 5. Hvilken av rekkene under er Fourierrekken til den 2π-periodiske funksjonen definert ved relasjonen

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{hvis } -\pi < x < 0; \\ 0, & \text{hvis } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

a : $\frac{1}{2}+\frac{1}{i\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l+1}e^{i(2l+1)x}$; b : $-\frac{1}{2}+\frac{1}{i\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l+1}e^{i2lx}$;

c : $-\frac{1}{2}+\frac{1}{i\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l+1}e^{i(2l+1)x}$; d : $-\frac{1}{i\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{l^2+1}e^{ilx}$;

Oppgave 6. La $f(x)$ være den 2π-periodiske funksjonen som har graf med formen



Summen av funksjonens Fourierrekke i punktet $\frac{7}{2}\pi$ er

a : 0 b : $\frac{\pi}{2}$

c : π d : $-\frac{\pi}{2}$

Oppgave 7. La

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{hvis } -\infty < x < 0 \\ 0 & \text{hvis } 0 < x < \infty. \end{cases}$$

Dens Fouriertransformerte er

a : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-iw}$; b : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+iw}$;

c : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+w^2}$; d : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1-iw}$;

Oppgave 8. Den (komplekse) Fourierrekken til den 2π-periodiske funksjonen definert ved relasjonen $f(x) = e^x$ for $-\pi < x < \pi$ er

$$\frac{\sinh \pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1+in}{1+n^2}e^{inx}.$$

Det følger fra denne relasjonen at summen av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

er

a :	$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1\right)$	**b** :	$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh \pi} + 1\right)$
c :	$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\cosh \pi} + 1\right)$	**d** :	$\frac{1}{2}\left(\frac{\sinh \pi}{\pi} - 2\right)$