EKSAMEN I MATEMATIKK 4N (TMA4125)

?. august 2008

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) De Laplacetransformerte finner vi i tabellen.

$$
\begin{array}{lll}
i) & F(s) = \dfrac{1}{s^2}, & \\
ii) & G(s) = \dfrac{1}{(s-2)^2}, & \text{første skifteteorem,} \\
iii) & H(s) = e^{-2s}\dfrac{1}{(s-2)^2}, & \text{andre skifteteorem.}
\end{array}
$$

b) Bruker vi Laplacetransformasjonen på ligningen får vi

$$sY - 1 - 3Y + \frac{1}{s-1}Y = e^{-2s}\frac{1}{s}.$$

Samler vi Y-leddene på høyre side får vi

$$
\begin{aligned}
&(s^2 - 4s + 4)Y = s - 1 + e^{-2s}\frac{1}{s}(s-1), \qquad \text{som gir} \\
&Y = \frac{s-1}{(s-2)^2} + e^{-2s}\frac{s-1}{s(s-2)^2} \\
&\quad = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} + e^{-2s}\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-2)^2}\right).
\end{aligned}
$$

Transformerer vi tilbake får vi

$$y(t) = (1+t)e^{2t} + \frac{1}{4}\left(-1 + e^{2(t-2)} + 2(t-2)e^{2(t-2)}\right)u(t-2), \qquad \text{eller}$$
$$y(t) = (1+t)e^{2t} + \frac{1}{4}\left((2t-3)e^{2(t-2)} - 1\right)u(t-2).$$

Oppgave 2

a) Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i ligningen og får $G'F = 4F''G$. Ved å dele med $4FG$ får $\frac{G'}{4G} = \frac{F''}{F}$, og vi har separert variablene x og t. Denne ligningen holder bare dersom $\frac{F''}{F} = k$ der k er en konstant. For å få tilfredsstilt randbetingelsen må $k = -(\pi n)^2$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$. For et gitt naturlig tall n har vi da

$$F_n'' = -(\pi n)^2 F_n \qquad \text{og} \qquad G_n' = -(2\pi n)^2 G_n.$$

Løsningene er

$$u_n(x,t) = B_n e^{-(2\pi n)^2 t} \sin n\pi x$$

for vilkårlige heltall n og vilkårlige konstanter B_n.

b) Superposisjonsprinsippet visere at løsningen av ligningen som tilfredstiller både randbetingelsen og initialbetingelsen er

$$u(x,t) = e^{-(2\pi)^2 t} \sin \pi x + \frac{1}{3} e^{-(6\pi)^2 t} \sin 3\pi x.$$

Oppgave 3

a) Enten man regner komplekst, bruker formlene i Rottmann eller bruker 2 ganger delvisintegrasjon, får man, om man regner rett,

$$A(w) + iB(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\,dx + i\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx.$$

Siden $f(x) = 0$ for $x < 0$ er dette

$$A(w) + iB(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}e^{iwx}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x+iwx}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{(-1+iw)x}}{-1+iw}\right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{-1}{(-1+iw)} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+w^2} + i\frac{w}{1+w^2}\right),$$

og siden $A(w)$ og $B(w)$ er reelle funksjoner er

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+w^2} \qquad \text{og} \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\frac{w}{1+w^2}.$$

b) Vi har

$$\frac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+)) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw + \int_0^\infty B(w)\sin wx\,dw$$

Vi tar $x = 2$ og $x = -2$. I disse punktene er funksjonen f kontinuerlig. Vi har $f(2) = e^{-2}$ og $f(-2) = 0$ og derfor

$$e^{-2} = \int_0^\infty \left(\frac{\cos(2w) + w\sin(2w)}{\pi(1+w^2)}\right) dw \tag{L-1}$$

og

$$0 = \int_0^\infty \left(\frac{\cos(2w) - w\sin(2w)}{\pi(1+w^2)}\right) dw \tag{L-2}$$

Ved å ta differensen av (L-1) og (L-2), får man

$$2\int_0^\infty \frac{w\sin(2w)}{\pi(1+w^2)}\,dw = e^{-2}.$$

Følgelig er

$$\int_0^\infty \frac{w\sin 2w}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-2}.$$

Oppgave 4

a) Vi setter

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}.$$

Da får vi

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 + 2y_2 + 4t \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}).$$

b) Lar vi $\mathbf{y}_n$ betegne den tilnærmede verdien til $\mathbf{y}(t_0+nh)$ og setter $t_n = t_0+nh$, sier Eulers metode at

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n).$$

I vårt tilfelle gir dette at

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1\begin{pmatrix} 1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix}.$$

Bruker vi isteden initialverdiproblemet

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 + y_2 + t \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}),$$

får vi

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 5 For å bruke Gauss–Seidel, skriver vi om systemet, slik at de dominante diagonalleddene kommer på venstre side.

$$\begin{array}{rclcccl} x & = & & 0.25y & & - & 1.50, \\ y & = & 0.25x & + & 0.25z & - & 1.75, \\ z & = & & 0.25y & & - & 2.00. \end{array}$$

Gauss–Seidels metode er følgende

$$\begin{array}{rclcccl} x^{(n+1)} & = & & 0.25y^{(n)} & & - & 1.50, \\ y^{(n+1)} & = & 0.25x^{(n+1)} & + & 0.25z^{(n)} & - & 1.75, \\ z^{(n+1)} & = & & 0.25y^{(n+1)} & & - & 2.00. \end{array}$$

Med startverdiene $x^{(0)} = -2,\ y^{(0)} = -3,\ z^{(0)} = -3$ får vi

$$\begin{array}{rclcccccl} x^{(1)} & = & & -0.75 & & - & 1.50 & = & -2.25, \\ y^{(1)} & = & -0.5625 & - & 0.75 & - & 1.75 & = & -3.0625, \\ z^{(1)} & = & & -0.765625 & & - & 2.00 & = & -2.765625. \end{array}$$

Oppgave 6 Som i den ekplisitte metoden for varmeligningen, tilnærmer vi u_t og u_{xx} på den følgende måten:

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}$$

og

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j - 2U_i^j}{h^2}.$$

Dermed, ved å bruke ligningen $u_t = 2u_{xx} + x$, får man at

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} = 2\frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j - 2U_i^j}{h^2} + x_i.$$

Dette kan skrives om som

$$U_i^{j+1} = 2r(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) + (1-4r)U_i^j + ikh$$

der $r = \frac{k}{h^2} = 1$. For $i = 1$, bruker vi startsbetingelsene $U_0^0 = 0$, $U_1^0 = h = 0.5$, $U_2^0 = 2h = 1$, og vi får

$$U_1^1 = 2r(U_2^0 + U_0^0) + (1-4r)U_1^0 + kh = 0.625.$$

For $i = 2$, bruker vi startsbetingelsene $U_1^0 = h = 0.5$, $U_2^0 = 2h = 1$, $U_3^0 = 3h = 1.5$, og vi får

$$U_2^1 = 2r(U_3^0 + U_1^0) + (1 - 4r)U_2^0 + 2kh = 1.25.$$

For $i = 3$, bruker vi startsbetingelsene $U_2^0 = 2h = 1$, $U_3^0 = 3h = 1.5$, $U_4^0 = 2$, og vi får

$$U_3^1 = 2r(U_4^0 + U_2^0) + (1 - 4r)U_3^0 + 3kh = 1.875.$$