NEWTONS METODE FOR SYSTEMER

Vi vil løse

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

der $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er en vektoriel funksjon av flere variabler. Vi kan skrive $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ der $f_i(x)$ er skalare funksjoner ($f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) som er komponentene til $f(x)$. Da er (1) ekvivalent til det følgende systemet av n ligninger:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Vi definerer **Jacobimatrisen** i punktet x som matrisen $J(x)$ som er gitt ved

$$J_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \tag{2}$$

der $J_{i,j}$ er elementet som er på den i. raden og den j. kolonnet. Det vil si at vi har

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

hvor hver partiell derivert er evaluert i x.

Teorem 1. *For alle x og $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, har vi*

$$f(x) = f(\bar{x}) + J(\bar{x})(x - \bar{x}) + |x - \bar{x}|\, h(x - \bar{x})$$

der funksjonen $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oppfyller $\lim_{z \to 0} h(z) = 0$. Man kaller

$$\tilde{f}(x) = f(\bar{x}) + J(\bar{x})(x - \bar{x})$$

den **lineære tilnærmingen** *til f rundt punktet $\bar{x}$.*

Det som man må huske fra teorem 1 er at $f(x)$ er *veldig nær* $\tilde{f}(x)$ når x er *nær* $\bar{x}$ eller

$$f(x) = \tilde{f}(x) + \text{ noe liten}$$

når x er nær $\bar{x}$.

Man kan ikke løse direkte $f(x) = 0$ (hvis man kan det, da trenger man ingen numeriske metode!) *men*, gitt et startspunkt x^0, kan man løse

$$\tilde{f}(x) = 0 \tag{4}$$

der $\tilde{f}$ er den lineære tilnærmingen til f rundt x^0 som definert i Teorem 1. Vi har

$$\tilde{f}(x) = f(x^0) + J(x^0)(x - x^0) = 0$$

hvis og bare hvis

$$x = x^0 - J(x^0)^{-1} f(x^0).$$

Vi kaller x^1 løsningen til (4), det vil si

$$x^1 = x^0 - J(x^0)^{-1} f(x^0).$$

Vi repeterer dette for hver n og får Newtons metode:

$$\boxed{x^{n+1} = x^n - J(x^n)^{-1} f(x^n)}$$