Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Knudsen 73 59 35 23 916 34 712
Andreas Asheim 73 59 35 27

EKSAMEN I MATEMATIKK 4M (TMA4123)

Mandag 18. mai 2009
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 8. juni 2009

BOKMÅL

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S, Citizen SR270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Det oppgis at Fouriersinusrekka til funksjonen $f(x) = x(1-x)$ i intervallet $0 < x < 1$ er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, der

$$b_n = \frac{4(1-(-1)^n)}{\pi^3 n^3}.$$

a) Beregn summen av rekken

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \cdots .$$

b) Løs varmeligningen

$$u_t = 4u_{xx} \quad \text{for} \quad 0 < t \quad \text{og} \quad 0 < x < 1,$$

med randverdiene

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

og med initialverdiene

$$u(x,0) = x(1-x).$$

Oppgave 2

a) Vis at Fouriertransformen til funksjonen

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{når} \quad |x| \le 1, \\ 0 & \text{når} \quad |x| > 1, \end{cases} \qquad \text{er gitt ved} \qquad \hat{h}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin w}{w}.$$

b) Vis at Fouriertransformen til funksjonen $g(x) = (1 - x^2)h(x)$ er

$$\hat{g}(w) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin w - w \cos w}{w^3}.$$

Beregn integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w - w \cos w}{w^3} dw.$$

Hint: Dersom funksjonene $f(x)$ og $xf(x)$ begge har Fouriertransform, så gjelder

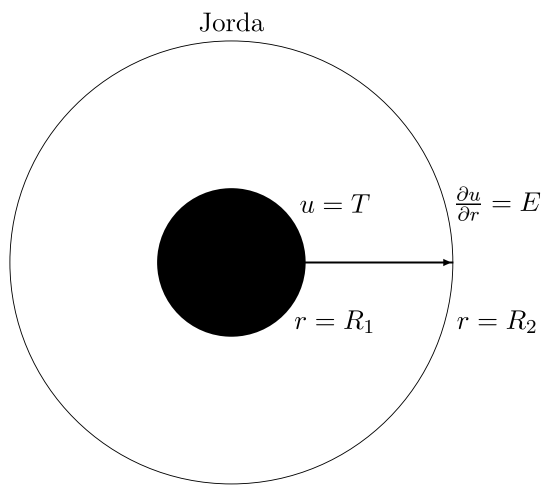
$$\mathcal{F}(xf(x))(w) = i \frac{d}{dw} \mathcal{F}(f(x))(w).$$

Oppgave 3 Gjør én iterasjon med Newtons metode for å finne en approksimasjon til x og y, gitt av systemet

$$\begin{cases} e^y - x & = 0, \\ \sin(x + y) & = 0. \end{cases}$$

Bruk startverdiene $x_0 = \frac{3}{4}\pi$ og $y_0 = \frac{1}{4}\pi$.

Oppgave 4



En kule med radius R_1 ligger i sentrum av en større kule med radius R_2. Den lille kulen holder konstant temperatur T, og vi antar at ved overflaten av den store kulen unslipper en konstant mengde energi per tid ut i rommet. Vi skal se på det stasjonære tilfellet, dvs. at systemet har stått såpass lenge at temperaturfordelingen er konstant mhp. tiden, og vi antar konstant diffusjonskoeffisient. Du kan tenke på dette som en modell av jordas indre med den varme jernmantelen i midten. Vi ønsker å finne temperaturfordelingen inne i den store kula.

Modellen beskrives av den radielle Laplace-ligningen,

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = 0, \quad R_1 < r < R_2,$$

hvor u er en funksjon kun av r, med randbetingelsene

$$u(R_1) = T, \qquad \frac{\partial u}{\partial r}(R_2) = E.$$

Her er T og E konstanter.

a) Intervallet $[R_1, R_2]$ diskretiseres slik at for en gitt N er $h = (R_2 - R_1)/N$, og $r_j = R_1 + j \cdot h$ for $j = 0, \ldots, N$. La u_j betegne en numerisk approksimasjon til løsningen $u(r_j)$. Vis at ved å bruke sentraldifferanseapproksimasjoner får vi følgende differanseskjema for de indre punktene,

$$\left(1 - \frac{h}{r_j}\right) u_{j-1} - 2u_j + \left(1 + \frac{h}{r_j}\right) u_{j+1} = 0, \qquad j = 1, \ldots, N-1. \tag{1}$$

b) Randbetingelsen i $r = R_2$ må behandles spesielt siden u_N ikke er gitt eksplisitt. Innfør derfor en ekstra variabel u_{N+1} og sett opp en sentraldifferanseapproksimasjon til den deriverte i $r = R_2$. Med denne, og differanseskjemaet (1) anvendt i punktet $r = R_2$, finn en ligning for u_N som bare involverer de ukjente u_N og u_{N-1}.

c) Sett $R_1 = 0.2$, $R_2 = 1$, $N = 4$, $T = 20$ og $E = -5$ og gjør en iterasjon med Gauss-Seidel på det resulterende systemet for å finne en approksimasjon til løsningen $[u_1, u_2, u_3, u_4]^T$ fra startvektoren $[1, 1, 1, 1]^T$. Dersom du ikke fikk til oppgave b), bruk

$$u_N - u_{N-1} = -7/6$$

som ligning for u_N.

Oppgave 5 Følgende kode vil gi deg en approksimasjon til $\int_0^1 \sin(\pi x) \mathrm{d}x$.

```
1-  h  = 1/4;
2-  S1 = 2*h/3*[1 0 4 0 1];
3-  S2 = h/3*[1 4 2 4 1];
4-  x  = 0:h:1;
5-
6-  F  = sin(x*pi);
7-
8-  I1 = S1*F';
9-  I2 = S2*F'
10-
11- E  = 1/15*(I1-I2)
```

Hvis du kjører koden vil følgende skrives ut på skjermen:

```
I2 =
   0.638071187457698
E =
   0.001906365280598
```

`I2` er approksimasjonen vi er ute etter og `E` er et estimat for feilen.

a) Hva slags metode er det som er implementert her?

b) Anta at feilen er proporsjonal med h^4 når $h \to 0$. Vis hvordan vi kommer fram til uttrykket på linje 11.