



Faglig kontakt under eksamen:

Finn Knudsen 73 59 35 23 916 34 712

Niklas Sävström 73 59 35 27

## EKSAMEN I MATEMATIKK 4D (TMA4135)

Mandag 10. august 2009

Tid: 15:00 – 19:00

Sensur 31. august 2009

### BOKMÅL

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S, Citizen SR270X)

Rottmann: *Matematisk formelsamling*

*Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

### Oppgave 1

a) Finn Laplacetransformen til funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{if } 0 \leq t < 1, \\ 2 - t & \text{if } 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{if } 2 \leq t. \end{cases}$$

b) Finn den inverse Laplacetransformen til funksjonen

$$G(s) = \frac{se^{-2s}}{(s+1)^3}.$$

**Oppgave 2**

a) Beregn Fouriercosinusrekka til funksjonen  $f$  definert ved,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{if } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

b) Finn løsningen av rand- og initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} (1) \quad & u_t = u_{xx} && \text{(den éndimensjonale varmeligningen),} \\ (2) \quad & u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0 && \text{for } t \geq 0, \\ (3) \quad & u(x, 0) = f(x) && \text{for } 0 < x < 2, \end{aligned}$$

når det oppgis at alle funksjoner av formen  $u(x, t) = F(x)G(t)$  som oppfyller (1) og (2) er enten en konstant eller en konstant ganger funksjonen  $u_n(x, t) = e^{-(n\frac{\pi}{2})^2 t} \cos n\frac{\pi}{2}x$ , for  $n = 1, 2, 3, \dots$

c) Finn alle løsningene av ligning (1) av formen  $u(x, t) = F(x)G(t)$  som oppfyller randbetingelsene

$$(4) \quad u(0, t) = u_x(2, t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0.$$

**Oppgave 3** Bruk Fouriertransformasjonen til å beregne

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}} du.$$

**Oppgave 4** Gitt funksjonen

$$f(x, y) = x^2 (1 + e^{y^3})^2.$$

La  $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$  betegne den retningsderiverte av  $f$  i punktet  $(x_0, y_0)$  bestemt av vektoren  $\mathbf{u}$ . Finn enhetsvektorene  $\mathbf{u}_+$ ,  $\mathbf{u}_-$  og  $\mathbf{u}_0$  slik at

$$D_{\mathbf{u}_+}f(1, 1) \text{ er størst mulig, } D_{\mathbf{u}_-}f(1, 1) \text{ er minst mulig } \quad \text{og} \quad D_{\mathbf{u}_0}f(1, 1) = 0.$$

**Oppgave 5**

a) Gitt et system av ordinære differensialligninger

$$(5) \quad \begin{aligned} y_1' &= -y_2, \\ y_2' &= y_1, \end{aligned}$$

med initialbetingelsen

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Finn en tilnærming til løsningen av systemet (5)  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$ , når  $t = 0.2$ , ved bruk av den implisitte trapesmetoden, gitt av

$$(6) \quad \mathbf{y}^{(i+1)} = \mathbf{y}^{(i)} + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}^{(i)}) + \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}^{(i+1)})], \quad t_i = t_0 + ih.$$

Bruk  $h = 0.2$ , dvs  $\mathbf{y}^{(1)} \approx \mathbf{y}(0.2)$ .

b) Vis at for systemet (5), med de gitte initialbetingelsene, er

$$\|\mathbf{y}(t)\|_2 = 1, \quad \text{for } t \geq 0$$

hvor  $\|\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ . Dvs. lengden  $\|\mathbf{y}\|_2$  er konstant lik en.

c) Vis at

$$\|\mathbf{y}^{(i+1)}\|_2 = \|\mathbf{y}^{(i)}\|_2, \quad \text{for } i = 0, 1, 2, \dots,$$

der  $\mathbf{y}^{(i)}$  er gitt av trapesmetoden (6) anvendt på ligningssystemet (5). Dvs. trapesmetoden bevarer lengden,  $\|\mathbf{y}^{(i)}\|_2$ .

Hint:

$$\begin{bmatrix} 2 & h \\ -h & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4 + h^2} \begin{bmatrix} 2 & -h \\ h & 2 \end{bmatrix}$$

**Oppgave 6** Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= e^y - x, \\ y' &= x + y, \end{aligned}$$

med initialbetingelsen

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

Bruk Heuns metode til å finne en tilnærming til  $x(t)$ ,  $y(t)$ , når  $t = 0.5$ . Bruk  $h = 0.5$ .