Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Eksamen TMA4123
18. mai 2009

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ **a)** La

$$S = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \cdots .$$

Vi har at

$$f(x) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} \sin n\pi x.$$

Setter $x = \frac{1}{2}$. Da får vi

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} \sin n\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi^3} 2S.$$

Litt algebra gir $\quad S = \dfrac{\pi^3}{32}.$

b) Et standardargument viser at alle løsninger av ligningen som tilfredsstiller randkravene og er av formen $F(x)G(t)$ er

$$u_n(x,t) = e^{-4n^2\pi^2 t} \sin n\pi x, \qquad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Superposisjonsprinsippet gir oss derfor løsningen $u(x,t) = \sum_1^\infty b_n u_n(x,t)$, eller skrevet ut

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^3} \left(\frac{1}{1^3} e^{-4\pi^2 t} \sin \pi x + \frac{1}{3^3} e^{-36\pi^2 t} \sin 3\pi x + \frac{1}{5^3} e^{-100\pi^2 t} \sin 5\pi x + \cdots \right).$$

$\boxed{2}$ **a)** Fra definisjonen har vi

$$\mathcal{F}\left\{h(x)\right\}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ixw} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ixw} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin w}{w}.$$

Ved to gangers derivasjon får vi

$$\mathcal{F}\left\{x^2 h(x)\right\}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin w}{w} - 2\frac{\sin w - w\cos w}{w^3} \right).$$

Altså

$$\mathcal{F}\left\{(1-x^2)h(x)\right\}(w) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin w - w\cos w}{w^3} \right).$$

b) Fourierinversjon gir

$$(1-x^2)h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin w - w\cos w}{w^3}\right)e^{ixw}dw.$$

Ved å sette $x=0$ finner vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w - w\cos w}{w^3}dw = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{3}$ Vi regner ut Jacobimatrisa J til systemet:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & e^y \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

Evaluert i (x_0, y_0) har vi

$$J(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -1 & e^{\frac{\pi}{4}} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Funksjonen evaluert i (x_0, y_0) blir

$$\mathbf{f}(x_0, y_0) = [e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{3\pi}{4}, 0]^T$$

Inkrementet $\Delta\mathbf{x} = [\Delta x, \Delta y]^T$ regner vi fra ligningen $J(x_0,y_0)\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(x_0,y_0)$. Vi setter opp ligningssystemet:

$$\begin{pmatrix} -1 & e^{\frac{\pi}{4}} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{4} - e^{\frac{\pi}{4}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dette systemet har løsning

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{3\pi}{4} - e^{\pi/4}}{1+e^{\pi/4}} \\ \frac{\frac{3\pi}{4} - e^{\pi/4}}{1+e^{\pi/4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,051018 \\ 0,051018 \end{pmatrix}$$

Svaret blir altså

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \Delta x \\ y_0 + \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{4} - \frac{\frac{3\pi}{4} - e^{\pi/4}}{1+e^{\pi/4}} \\ \frac{\pi}{4} + \frac{\frac{3\pi}{4} - e^{\pi/4}}{1+e^{\pi/4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,305176 \\ 0,836416 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ **a)** Sentraldifferanseapproksimasjonen til den andrederiverte er

$$u_{rr} \approx \frac{1}{h^2}(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}).$$

Sentraldifferanseapproksimasjonen til den førstederiverte er

$$u_r \approx \frac{1}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1}).$$

Setter vi disse inn i ligningen, får vi et numerisk skjema(orden 2) for $u_j \approx u(r_j)$:

$$\frac{1}{h^2}(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + \frac{1}{r_j}\frac{2}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1}) = 0.$$

Denne forenkles til det gitte differanseskjemaet.

b) Sentraldifferanseapproksimasjonen til den førstederiverte i punktet $r = R_2 = r_N$ er

$$u_r|_{r=R_2} \approx \frac{1}{2h}(u_{N+1} - u_{N-1}).$$

Med randbetingelsen $u_r|_{r=R_2} = E$ får vi da følgende ligning for u_{N+1}:

$$u_{N+1} = 2hE + u_{N-1}$$

Differanseskjemaet i r_N er

$$\left(1 - \frac{h}{R_2}\right) u_{N-1} - 2u_N + \left(1 + \frac{h}{R_2}\right) u_{N+1} = 0.$$

Kombinerer vi de to ligningene får vi

$$u_N - u_{N-1} = hE(1 + \frac{h}{R_2}).$$

c) Med de gitte dataene får vi $h = 1/5$ og $r_0 = h$, $r_1 = 2h$, $r_2 = 3h$, $r_3 = 4h$, $r_4 = 5h$ og følgende fire ligninger for de fire punktene, $j = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}T - 2u_1 + \frac{3}{2}u_2 &= 0\\
\frac{2}{3}u_1 - 2u_2 + \frac{4}{3}u3 &= 0\\
\frac{3}{4}u_2 - 2u_3 + \frac{5}{4}u4 &= 0\\
u_4 - u_3 &= \frac{6}{25}E
\end{aligned}$$

På matriseform blir dette med verdiene for T og E innsatt

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -2 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

En Gauss-Seidel iterasjon på dette systemet gir:

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= \frac{-10 - 3/2u_2^{(0)}}{-2} = \frac{21}{4} = 5,7500000\\
u_2^{(1)} &= -\frac{1}{2}(-\frac{2}{3}u_1^{(1)} - \frac{4}{3}u_3^{(0)}) = 2,5833333\\
u_3^{(1)} &= -\frac{1}{2}(-\frac{3}{4}u_2^{(1)} - \frac{5}{4}u_4^{(0)}) = 1,5937500\\
u_4^{(1)} &= u_3^{(1)} - 6/5 = 0,3937500
\end{aligned}$$

I tilfellet hvor den alternative ligningen for $u_4^{(1)}$ brukes får vi

$$u_4^{(1)} = u_3^{(1)} - 7/6 = 0.42708333.$$

5

a) Vektorene `S1` og `S2` inneholder vektene til Simpsons kvadraturmetode for hhv. $h = 1/2$ og $h = 1/4$. Indreproduktene `S1*F’` og `S2*F’` vil derfor være to Simpson-approksimasjoner til integraler med to forskjellige steglengder.

b) Vi vet fra feilanalysen at

$$I - S_h = Ch^4 + H.O., \tag{1}$$

og følgelig at

$$I - S_{h/2} = Ch^4/16 + H.O.. \tag{2}$$

($H.O.$ betyr høyere ordens ledd(høyere enn 4) i h.) Trekker vi nå 16 ganger ligning (2) fra ligning (1) får vi

$$I - S_h - 16(I - S_{h/2}) = S_{h/2} - S_h - 15(I - S_{h/2}) = H.O.$$

Hvilket betyr at

$$I - S_{h/2} \approx \frac{1}{15}(S_{h/2} - S_h),$$

Dette er `E` i koden og er altså et estimat for feilen i approksimasjonen $S_{h/2}$.

Den eksakte løsningen til problemet er $2/\pi$, den eksakte feilen er $0.638071187457698 - 2/\pi = 0.001451415090117\ldots$, og ligger som vi ser nær approksimasjonen.