



- 1 a) Ved å benytte enhetstrappfunksjonen kan vi skrive

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1)(u(t-1) - u(t-2)) = \\ &= (t-1)u(t-1) - (t-1)u(t-2) = (t-1)u(t-1) - (t-2+1)u(t-2) = \\ &= (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) - u(t-2). \end{aligned}$$

Skifte på t -aksen gir da

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = e^{-s} \frac{1}{s^2} - e^{-2s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right).$$

- b) Vi bruker delbrøkkoppspalting.

$$\frac{s}{(s+2)^2} = \frac{s+2-2}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} - 2 \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Skifte på s -aksen gir da

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+2)^2} \right\} (t) = e^{-2t} (1 - 2t).$$

Skifte på t -aksen gir

$$\mathcal{L}^{-1} \{G(s)\} (t) = g(t) = e^{-2(t-1)} (1 - 2(t-1)) u(t-1),$$

eller

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 1, \\ e^{-2(t-1)} (3 - 2t) & \text{for } t > 1. \end{cases}$$

- c) Vi Laplacetransformerer ligningen og får ved linearitet og konvolusjonformelen at

$$sY - 1 - 3Y \frac{1}{s-2} = 0.$$

Litt algebra gir oss så

$$Y = \frac{s-2}{s^2-2s-3} = \frac{1}{4} \frac{1}{s-3} + \frac{3}{4} \frac{1}{s+1}.$$

Inversjon gir oss

$$y(t) = \frac{1}{4} e^{3t} + \frac{3}{4} e^{-t}.$$

2 a) La

$$S = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots$$

Vi har at

$$f(x) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin n\pi x.$$

Setter $x = \frac{1}{2}$. Da får vi

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin n\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi^3} 2S.$$

Litt algebra gir $S = \frac{\pi^3}{32}$.

b) Et standardargument viser at alle løsninger av ligningen som tilfredsstiller randkravene og er av formen $F(x)G(t)$ er

$$u_n(x, t) = e^{-4n^2\pi^2 t} \sin n\pi x, \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

Superposisjonsprinsippet gir oss derfor løsningen $u(x, t) = \sum_1^{\infty} b_n u_n(x, t)$, eller skrevet ut

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \left(\frac{1}{1^3} e^{-4\pi^2 t} \sin \pi x + \frac{1}{3^3} e^{-36\pi^2 t} \sin 3\pi x + \frac{1}{5^3} e^{-100\pi^2 t} \sin 5\pi x + \dots \right).$$

3 a) Fra definisjonen har vi

$$\mathcal{F}\{h(x)\}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ixw} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-ixw} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin w}{w}.$$

Ved to gangers derivasjon får vi

$$\mathcal{F}\{x^2 h(x)\}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin w}{w} - 2 \frac{\sin w - w \cos w}{w^3} \right).$$

Altså

$$\mathcal{F}\{(1-x^2)h(x)\}(w) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin w - w \cos w}{w^3} \right).$$

b) Fourierinversjon gir

$$(1-x^2)h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin w - w \cos w}{w^3} \right) e^{ixw} dw.$$

Ved å sette $x = 0$ finner vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w - w \cos w}{w^3} dw = \frac{\pi}{2}.$$

4 Vi regner ut Jacobimatrisa J til systemet:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & e^y \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

Evaluert i (x_0, y_0) har vi

$$J\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -1 & e^{\frac{\pi}{4}} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Funksjonen evaluert i (x_0, y_0) blir

$$\mathbf{f}(x_0, y_0) = \left[e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{3\pi}{4}, 0\right]^T$$

Inkrementet $\Delta \mathbf{x} = [\Delta x, \Delta y]^T$ regner vi fra ligningen $J(x_0, y_0)\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(x_0, y_0)$. Vi setter opp ligningssystemet:

$$\begin{pmatrix} -1 & e^{\frac{\pi}{4}} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{4} - e^{\frac{\pi}{4}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dette systemet har løsning

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{3\pi}{4} - e^{\pi/4}}{1 + e^{\pi/4}} \\ \frac{\frac{3\pi}{4} - e^{\pi/4}}{1 + e^{\pi/4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,051018 \\ 0,051018 \end{pmatrix}$$

Svaret blir altså

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \Delta x \\ y_0 + \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{4} - \frac{\frac{3\pi}{4} - e^{\pi/4}}{1 + e^{\pi/4}} \\ \frac{\pi}{4} + \frac{\frac{3\pi}{4} - e^{\pi/4}}{1 + e^{\pi/4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,305176 \\ 0,836416 \end{pmatrix}$$

5 a) Sentraldifferanseapproximasjonen til den andrederiverte er

$$u_{rr} \approx \frac{1}{h^2}(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}).$$

Sentraldifferanseapproximasjonen til den førstederiverte er

$$u_r \approx \frac{1}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1}).$$

Setter vi disse inn i ligningen, får vi et numerisk skjema(orden 2) for $u_j \approx u(r_j)$:

$$\frac{1}{h^2}(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + \frac{1}{r_j} \frac{2}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1}) = 0.$$

Denne forenkles til det gitte differanseskjemaet.

b) Sentraldifferanseapproximasjonen til den førstederiverte i punktet $r = R_2 = r_N$ er

$$u_r|_{r=R_2} \approx \frac{1}{2h}(u_{N+1} - u_{N-1}).$$

Med randbetingelsen $u_r|_{r=R_2} = E$ får vi da følgende ligning for u_{N+1} :

$$u_{N+1} = 2hE + u_{N-1}$$

Differanseskjemaet i r_N er

$$\left(1 - \frac{h}{R_2}\right) u_{N-1} - 2u_N + \left(1 + \frac{h}{R_2}\right) u_{N+1} = 0.$$

Kombinerer vi de to ligningene får vi

$$u_N - u_{N-1} = hE\left(1 + \frac{h}{R_2}\right).$$

- c) Med de gitte dataene får vi $h = 1/5$ og $r_0 = h$, $r_1 = 2h$, $r_2 = 3h$, $r_3 = 4h$, $r_4 = 5h$ og følgende fire ligninger for de fire punktene, $j = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}T - 2u_1 + \frac{3}{2}u_2 &= 0 \\ \frac{2}{3}u_1 - 2u_2 + \frac{4}{3}u_3 &= 0 \\ \frac{3}{4}u_2 - 2u_3 + \frac{5}{4}u_4 &= 0 \\ u_4 - u_3 &= \frac{6}{25}E \end{aligned}$$

På matriseform blir dette med verdiene for T og E innsatt

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -2 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

En Gauss-Seidel iterasjon på dette systemet gir:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \frac{-10 - 3/2u_2^{(0)}}{-2} = \frac{21}{4} = 5,7500000 \\ u_2^{(1)} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}u_1^{(1)} - \frac{4}{3}u_3^{(0)}\right) = 2,5833333 \\ u_3^{(1)} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}u_2^{(1)} - \frac{5}{4}u_4^{(0)}\right) = 1,5937500 \\ u_4^{(1)} &= u_3^{(1)} - 6/5 = 0,3937500 \end{aligned}$$

I tilfellet hvor den alternative ligningen for $u_4^{(1)}$ brukes får vi

$$u_4^{(1)} = u_3^{(1)} - 7/6 = 0.42708333.$$