



- 1 a) Ved å benytte enhetstrappfunksjonen kan vi skrive

$$f(t) = t(u(t) - u(t-1)) + (2-t)(u(t-1) - u(t-2)) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2).$$

Skifte på t -aksen gir da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) &= \frac{1}{s^2} - 2e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-2s}\frac{1}{s^2} = \\ &= \frac{1}{s^2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right)^2.\end{aligned}$$

- b) Vi bruker delbrøkoppstilling.

$$\frac{s}{(s+1)^3} = \frac{s+1-1}{(s+1)^3} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}.$$

Skifte på s -aksen gir da

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^3}\right\}(t) = e^{-t}\left(t - \frac{1}{2}t^2\right).$$

Skifte på t -aksen gir

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) = g(t) = e^{-(t-2)}\left((t-2) - \frac{1}{2}(t-2)^2\right)u(t-2),$$

eller

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 2, \\ e^{-(t-2)}\left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t - 4\right) & \text{for } t > 2. \end{cases}$$

- 2 a) Likeutvidelsen \tilde{f} av f er periodisk med periode $2L = 4$, så vi har

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{2}x.$$

Vi finner

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad \text{og}$$

$$a_n = \int_1^2 \cos n\frac{\pi}{2}x \, dx = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 2k, \\ \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} & \text{if } n = 2k+1. \end{cases}$$

Skriver vi dette ut ser vi at

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{2}x}{1} - \frac{\cos 3\frac{\pi}{2}x}{3} + \frac{\cos 5\frac{\pi}{2}x}{5} - \dots \right).$$

- b) Siden ligningen og randkravene er homogene gjelder superposisjonsprinsippet, så

$$u(x, t) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n e^{-(n\frac{\pi}{2})^2 t} \cos n\frac{\pi}{2}x$$

er løsning av (1) og (2).

For også å få tilfredsstillt initialkravet (3) må vi velge $A_n = a_n$. Altså

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(e^{-(\frac{\pi}{2})^2 t} \frac{\cos \frac{\pi}{2}x}{1} - e^{-(3\frac{\pi}{2})^2 t} \frac{\cos 3\frac{\pi}{2}x}{3} + e^{-(5\frac{\pi}{2})^2 t} \frac{\cos 5\frac{\pi}{2}x}{5} - \dots \right).$$

- c) Setter vi inn $u(x, t) = F(x)G(t)$ i ligningen, finner vi etter litt drøfting at

$$F'' = -\lambda^2 F \quad \text{og} \quad G' = -\lambda^2 G$$

med $\lambda > 0$. Vi har da at

$$F(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad \text{og} \quad G(t) = C e^{-\lambda^2 t}$$

som insatt i (2) gir

$$A \cos \lambda 0 + B \sin \lambda 0 = 0 \quad \text{og} \quad \lambda B \cos \lambda 2 - \lambda A \sin \lambda 2 = 0.$$

Siden $\lambda > 0$ får vi ikke-triviell løsning når

$$A = 0 \quad \text{og} \quad 2\lambda = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

eller

$$\lambda = \frac{(2n+1)\pi}{4} \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Altså

$$u_n(x, t) = B_n e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)^2 t} \sin \frac{(2n+1)\pi}{4} x.$$

- 3] Dersom vi setter $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ har vi $\hat{h}(w) = h(w) = e^{-\frac{w^2}{2}}$, og

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}} du = (h \star h)(x).$$

Konvolusjonsregelen viser at

$$\mathcal{F}\{h \star h\}(w) = \sqrt{2\pi} h(w) h(w) = \sqrt{2\pi} e^{-w^2}.$$

Fourierinversjon gir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}} du = (h \star h)(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

4 Siden intervallene er like store kan vi bruke at

$$f(x) = f(-2) \binom{x+2}{0} + \Delta f(-2) \binom{x+2}{-2} + \Delta^2 f(-2) \binom{x+2}{2} \\ + \Delta^3 f(-2) \binom{x+2}{3} + \Delta^4 f(-2) \binom{x+2}{4},$$

der $\Delta f(x_k)$ er foroverdifferansen $f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

x_k	-2	-1	0	1	2
$f(x_k)$	5	1	-1	-1	1
$\Delta f(x_k)$	-4	-2	0	2	
$\Delta^2 f(x_k)$	2	2	2		
$\Delta^3 f(x_k)$	0	0			

Dermed blir $f(x) = 5 \binom{x+2}{0} - 4 \binom{x+2}{-2} + 2 \binom{x+2}{2} = x^2 - x - 1$.

5 Gitt et system av ordinære differensialligninger

$$\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = y_1, \end{cases} \quad (1)$$

med initialbetingelse

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

a) En tilnærming til løsningen $\mathbf{y}_i = [y_{1,i}, y_{2,i}]^T \approx \mathbf{y}(t_i)$, $t_i = t_0 + ih$, ved bruk av implisitt trapes metode et skritt, $h = 0.2$, gitt av

$$\mathbf{y}(0.2) \approx \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_1)],$$

gir

$$\begin{bmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_{2,1} \\ y_{1,1} \end{bmatrix} \right)$$

Løser vi ut de ukjente får vi

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \end{bmatrix} = \frac{1}{101} \begin{bmatrix} 99 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.98019801\dots \\ 0.19801980\dots \end{bmatrix}.$$

b) Vi skal vise at

$$\|\mathbf{y}(t)\|_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = 1, \quad \text{for } t \geq 0 \quad (\mathbf{y}(0) = [1, 0]^T).$$

For enkelhets skyld viser vi $\|\mathbf{y}(t)\|_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$. Siden $\|\mathbf{y}\|_2^2 = 1^2 + 0^2 = 1$, og

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{y}(0)\|_2^2 = \frac{d}{dt} (y_1^2 + y_2^2) = 2y_1 y_1' + 2y_2 y_2' = 2(y_1(-y_2) + y_1 y_2) = 0$$

så er $\|\mathbf{y}\|_2^2$ (og dermed $\|\mathbf{y}\|_2$) konstant bevart for $t \geq 0$. Dette kan også vises ved å finne og bruke den eksakte løsningen $y_1(t) = \cos t$, $y_2(t) = \sin t$ for at vise $\|\mathbf{y}(t)\|_2 = 1$.

- c) Vi skal vise at $\|\mathbf{y}_{i+1}\|_2 = \|\mathbf{y}_i\|_2$, for $i = 0, 1, 2, \dots$, der $\mathbf{y}_i = [y_{1,i}, y_{2,i}]^T$ er gitt av implisitte trapes metoden

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{y}_i) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_{i+1})].$$

Gitt ligningssystemet (1)

$$\begin{bmatrix} y_{1,i+1} \\ y_{2,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,i} \\ y_{2,i} \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \left(\begin{bmatrix} -y_{2,i} \\ y_{1,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_{2,i+1} \\ y_{1,i+1} \end{bmatrix} \right).$$

Løser vi for \mathbf{y}_{i+1} får vi

$$\begin{bmatrix} 2 & h \\ -h & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,i+1} \\ y_{2,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -h \\ h & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,i} \\ y_{2,i} \end{bmatrix}$$

og siden

$$\begin{bmatrix} 2 & h \\ -h & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4+h^2} \begin{bmatrix} 2 & -h \\ h & 2 \end{bmatrix}$$

er

$$\begin{bmatrix} y_{1,i+1} \\ y_{2,i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{4+h^2} \begin{bmatrix} 2 & -h \\ h & 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} y_{1,i} \\ y_{2,i} \end{bmatrix} = \frac{1}{4+h^2} \begin{bmatrix} (4-h^2)y_{1,i} - 4hy_{2,i} \\ 4hy_{1,i} + (4-h^2)y_{2,i} \end{bmatrix}.$$

Vi får til slutt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_{i+1}\|_2^2 &= \frac{1}{(4+h^2)^2} \left((4-h^2)^2 y_{1,i}^2 + 16h^2 y_{2,i}^2 + 16h^2 y_{1,i}^2 + (4-h^2)^2 y_{2,i}^2 \right) \\ &= \frac{1}{(4+h^2)^2} \left((4+h^2)^2 y_{1,i}^2 + (4+h^2)^2 y_{2,i}^2 \right) = y_{1,i}^2 + y_{2,i}^2 = \|\mathbf{y}_i\|_2^2. \end{aligned}$$

6 Gitt ligningssystemet

$$\begin{cases} x' = e^{-y} - x, \\ y' = x - y, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

Et skritt, $h = 0.5$, med Heuns metode, gitt av

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n), \\ \mathbf{K}_2 &= h\mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1), \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2), \end{aligned}$$

gir, hvis $\mathbf{y}_0 = [x_0, y_0]^T = [0, 0]^T$

$$\mathbf{K}_1 = 0.5 \begin{bmatrix} e^0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Videre er $\mathbf{y}_0 + \mathbf{K}_1 = [0.5, 0]^T$ og

$$\mathbf{K}_2 = 0.5 \begin{bmatrix} e^0 - 0.5 \\ 0.5 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}.$$

Og til slutt

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.125 \end{bmatrix}$$