Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Sigmund Selberg tlf. 73 55 02 84
Dag Wessel-Berg tlf. 73 59 13 43

EKSAMEN I TMA4130 MATEMATIKK 4N

Bokmål
Fredag 19. desember 2003
kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 19. januar 2004

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Vis at den Laplacetransformerte av $f(t) = 2te^t - e^t + e^{-t}$ er gitt ved

$$F(s) = \frac{4}{(s-1)^2(s+1)}.$$

Finn videre invers Laplacetransformert av $e^{-s}F(s)$.

b) Bruk Laplacetransformasjonen til å løse initialverdiproblemet

$$y'' - y = r(t) \quad \text{for } t > 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

hvor $r(t) = 0$ for $0 < t < 1$ og $r(t) = e^t$ for $t > 1$.

Oppgave 2 Løs integralligningen

$$y(t) = 1 - \int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau, \quad t > 0.$$

Oppgave 3

a) La $f(x) = x(1-x)$ for $0 \le x \le 1$. Finn Fourier-sinusrekken til $f(x)$.

b) Bestem summen av rekken $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \cdots$

I resten av oppgaven skal vi se på rand- og initialverdiproblemet

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + g = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

der g er en gitt konstant. (Problemet modellerer en svingende, horisontal streng påvirket av tyngdekraften.)

c) Finn funksjonen $v(x)$ (uavhengig av tiden t) som tilfredsstiller randproblemet

$$(2) \qquad \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} + g = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & t \ge 0, \end{cases}$$

d) Finn alle løsninger på formen $w(x,t) = F(x)G(t)$ av randproblemet

$$(3) \qquad \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ w(0,t) = w(1,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

Bestem videre en løsning av (3), gitt på rekkeform, slik at $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ løser det opprinnelige problemet (1).

Oppgave 4 Vi ser på den partielle differensialligningen

$$u_t - 2tu_{xx} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

med randbetingelsene $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = \lim_{x\to\pm\infty} u_x(x,t) = 0$ for $t \ge 0$.

a) Finn en ordinær differensialligning tilfredsstilt av den Fouriertransformerte $\hat{u}(w,t) = \mathcal{F}\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-iwx}\,dx$ av $u(x,t)$, og løs denne ligningen.

b) Anta i tillegg initialbetingelsen

$$u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$

der f er en gitt kontinuerlig, integrerbar funksjon. Vis at $u(x,t)$ kan skrives på formen

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y,t)\,dy, \qquad (t > 0)$$

og finn $g(y,t)$ eksplisitt. Det oppgis at $\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$ $(a > 0$ konstant).

Oppgave 5

a) Bruk både Lagranges og Newtons interpolasjonsmetoder til å finne annengradspolynomet $p(x)$ som oppfyller $p(-1) = 1$, $p(0) = 1$ og $p(1) = 3$. Merk at begge metodene skal vises.

b) Anta at $f(x)$ er en tre ganger kontinuerlig deriverbar funksjon slik at

$$f(-1) = 1, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 3 \quad \text{og} \quad |f'''(x)| \le 1 \quad \text{for } -1 < x < 1.$$

Vis at $|f(x) - p(x)| \le \frac{1}{9\sqrt{3}}$ for $-1 \le x \le 1$. (*Hint:* Ta utgangspunkt i en av formlene fra det vedlagte formelarket.)

Oppgave 6 Utfør én iterasjon med Newtons metode på ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2^3 + 1 &= 0, \\ x_1^2 - x_1 x_2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

med startverdier $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 1$.

Oppgave 7 Vi skal løse numerisk

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = 4x(1-x), & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

La $N \ge 2$ være et heltall, sett $h = 1/N$, og la $k > 0$. Dette gir oss gitterpunktene (x_i, t_j), der $x_i = i \cdot h$, $t_j = j \cdot k$. Vi betrakter differanseskjemaet (fullt implisitt metode)

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} = \frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{h^2} \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

der U_i^j er den søkte tilnærmelsen til u i punktet (x_i, t_j).

a) La $N = 4$, $k = \frac{1}{32}$. Vis at ligningssystemet for U_1^1, U_2^1 og U_3^1 kan skrives

$$(*) \qquad \begin{cases} 2U_1^1 - \frac{1}{2}U_2^1 = \frac{3}{4}, \\ -\frac{1}{2}U_1^1 + 2U_2^1 - \frac{1}{2}U_3^1 = 1, \\ -\frac{1}{2}U_2^1 + 2U_3^1 = \frac{3}{4}, \end{cases}$$

b) Sett $x = U_1^1$, $y = U_2^1$ og $z = U_3^1$, og utfør én iterasjon med Gauss-Seidels metode på $(*)$, med startverdier $x^0 = 3/4$, $y^0 = 1$ og $z^0 = 3/4$.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

  Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{n+1}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\
f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) - \frac{1}{2} h f''(\xi) \\
f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi)
\end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}
\end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned}
\text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\
\text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)
\end{aligned}$$

- En 2. ordens Runge-Kutta metode (Heun) for $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= h\,\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\
\mathbf{K}_2 &= h\,\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\
\mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)
\end{aligned}$$

Se også formlene i Rottmann.