TMA4130/35 MATEMATIKK 4N/D

Midtsemesterprøve 16. oktober 2004

Løsningsforslag

Oppgave 1 Den Laplacetransformerte til funksjonen $tu(t-1)$ er:

A: $\frac{1}{s}e^{-s}$ **B:** $\frac{1}{s^2}e^{-s}$ **C:** $\frac{1-s}{s^2}e^{-s}$ $\boxed{\textbf{D:}\ \frac{1+s}{s^2}e^{-s}}$

Funksjonen kan skrives som $f(t) = (1 + (t-1))u(t-1)$. Det er altså funksjonen $1 + t$ som er skiftet en enhet til høyre. Siden $\mathcal{L}(1-t)(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$ får vi fra andre skifteteorem at $\mathcal{L}(f)(s) = e^{-s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$ Svaret er **D**.

Oppgave 2 Gitt initialverdiproblemet $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Den Laplacetransformerte $Y(s)$ av løsningen $y(t)$ er:

$\boxed{\textbf{A:}\quad Y(s) = \frac{s+1}{s^2+1}}$ **B:** $Y(s) = \frac{1}{s^2}$ **C:** $Y(s) = \frac{s}{s^2+2}$ **D:** $Y(s) = \frac{s^2}{s+1}$

Svaret er **A**.

Oppgave 3

Den inverse Laplacetransformerte til $F(s) = \frac{1}{s(s-a)}$ er:

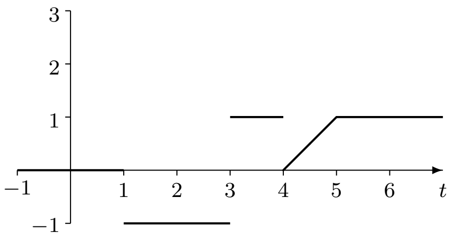
A: ae^{at} $\boxed{\textbf{B:}\ \frac{1}{a}(e^{at}-1)}$ **C:** $\frac{1}{a}(e^t - 1)$ **D:** e^{at}

Ved bruk av Teorem 3 s. 262 om Laplace transform av integralet av en funksjon, har vi

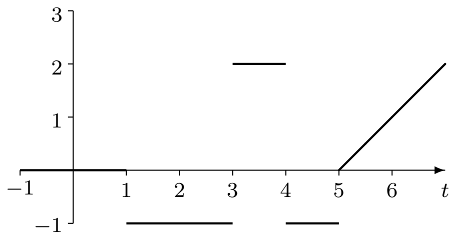
$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s(s-a)}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s-a)}) = \int_0^t e^{a\tau} d\tau = \left[\frac{1}{a}e^{a\tau}\right]_0^t = \frac{1}{a}(e^{at}-1)$, og svaret er **B**.

Oppgave 4 La $r(t) = -u(t-1) + 2u(t-3) - u(t-4) + (t-4)u(t-5)$, der $u(t)$ er trinnfunksjonen (også kalt Heavisidefunksjonen eller "unit step function”). Hvilken av de følgende figurene viser grafen til $r(t)$?

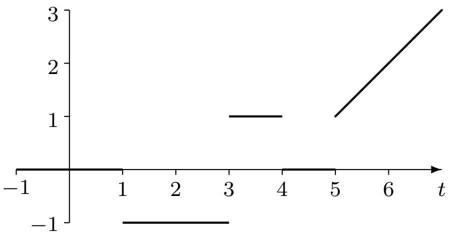
A:



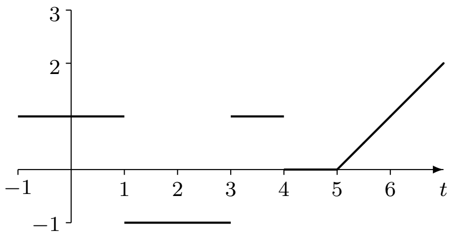
B:



C:



D:



Svaret er **C**.

Oppgave 5 En odde, periodisk funksjon f, med periode 2 er definert som $f(x) = x(1-x)$ for $0 \leq x \leq 1$. Fourierrekken til f er $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x$.

Funksjonsverdien $f(11{,}3)$ er:

A: $-116{,}39$ **B:** $-0{,}39$ **C:** $0{,}21$ **D:** $-0{,}21$

Vi har $f(11{,}3) = f(1{,}3) = -f(-1{,}3) = -f(0{,}7) = -0{,}7 \cdot 0{,}3 = -0{,}21$, og svaret er **D**.

Oppgave 6 Fourierkoeffisienten a_0 for funksjonen definert i oppgave 5 er:

A: $\dfrac{1}{6}$ **B:** $\dfrac{1}{3\pi}$ **C:** 0 **D:** $\dfrac{\pi}{6}$

Funksjonen er odde, så $a_n = 0$ for alle n, og svaret er **C**.

Oppgave 7

La $f(x)$ være den 2π-periodiske funksjonen gitt ved $f(x) = x(\pi - |x|)$ for $-\pi < x \leq \pi$. Det oppgis at Fourierrekken til $f(x)$ er $\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$. Bruk dette til å finne summen av rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$. Svaret er:

A: $\dfrac{\pi^2}{6}$ **B:** $\dfrac{\pi-2}{4}$ **C:** π **D:** $\dfrac{\pi^3}{32}$

Funksjonen $f(x)$ er kontinuerlig overalt (og deriverbar), så Fourierrekken konvergerer til $f(x)$ for alle x (Teorem 1 i avsnitt 10.2 av Kreyszig). Sett inn $x = \pi/2$ og bruk at

$$\sin\frac{(2n-1)\pi}{2} = (-1)^{n+1}$$

for å finne at svaret på oppgaven er **D**.

Oppgave 8

Løsningen av integralligningen $y(t) = t - \int_0^t y(\tau)(t-\tau)d\tau$ er:

A: $\cos t$ **B:** e^{-t} $\boxed{\textbf{C:}\ \sin t}$ **D:** $\cos t + e^{-t}$

Ligningen kan skrives som $y(t) = t - y(t) * t$ hvor '$*$' er konvolusjonsproduktet. Ved bruk av konvolusjonsteoremet, (Teorem 1 s. 279) får vi at den transformerte ligningen er $Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{Y(s)}{s^2}$, $Y(s)(\frac{s^2+1}{s^2}) = \frac{1}{s^2}$ og da $Y = \frac{1}{s^2+1}$. Løsningen er

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin(t).$$

Svaret er **C**.

Oppgave 9

Hvilket av alternativene er løsning av $u_x + u_y = 0$?

A: $u(x,y) = Ce^{k(x+y)}$ **B:** $u(x,y) = C\sin(kx)e^{-ky}$

C: $u(x,y) = Ce^{-kx}\sin(ky)$ $\boxed{\textbf{D:}\ u(x,y) = C\cdot\frac{e^{kx}}{e^{ky}}}$

Vi bruker separasjon av variabler $u(x,y) = F(x)G(y)$ og vi får

$$F'\cdot G + F\cdot G' = 0,$$

$$\frac{F'}{F} = -\frac{G'}{G} = k$$

og da $F' - kF = 0$ og $G' + kG = 0$ som har respektive løsninger, $F = C_1e^{kx}$ og $G = C_2e^{-ky}$ og da er

$$u(x,y) = C\cdot e^{kx}e^{-ky} = C\cdot\frac{e^{kx}}{e^{ky}}$$

og svaret er **D**.

Oppgave 10

La funksjonen $f(x)$ være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{for } 0 \le |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

Bruk Fourier-integralet til $f(x)$ til å finne verdien av integralet

$$\int_0^\infty \frac{\cos w - \cos^2 w}{w^2}\, dw.$$

Svaret er:

A: $\dfrac{\pi}{2}$ **B:** π $\boxed{\textbf{C:}\quad 0}$ **D:** $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

Fourierintegralet (se formler side 559 i Kreyszig) er

$$\int_0^\infty (A(w)\cos wx + B(w)\sin wx)\, dw$$

Siden $f(x)$ er en likefunksjon er $B(w) = 0$, og $A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1 - x)\cos wx dx$. To ganger delvisintegrasjon viser at $A(w) = \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos w}{w^2}$. Fra Teorem 1 i avsnitt 10.8 vet vi at

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w^2}\cos wx dw$$

Sett $x = 1$ for å finne at svaret på oppgaven er **C**.