Fra Kreyszig, avsnitt 5.1

$\boxed{7}$ Formelen $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$ gir her $\sin(\omega t+\delta) = \sin\omega t\cos\delta + \cos\omega t \sin\delta$. Av formlene 7 og 8 i tabell 5.1, Kreyszig s. 254, får vi da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\omega t+\delta)\} &= \mathcal{L}(\sin\omega t\cos\delta + \cos\omega t\sin\delta)\\ &= \mathcal{L}(\sin\omega t)\cos\delta + \mathcal{L}(\cos\omega t)\sin\delta\\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cos\delta + \frac{s}{s^2+\omega^2}\sin\delta = \frac{\omega\cos\delta + s\sin\delta}{s^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

$\boxed{15}$ For $0 \le t \le 1$ er grafen til $f(t)$ en rett linje med stigningstall $-\frac{1}{2}$ som går gjennom punktet $(0,1)$. Den har da ligning $y - 1 = -\frac{1}{2}(t-0)$, dvs. $y = 1 - \frac{1}{2}t$. Følgelig er $f(t)$ gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}t & \text{for } 0 \le t \le 1,\\ 0 & \text{for } t > 1.\end{cases}$$

Da kan vi finne den Laplacetransformerte ved integrasjon:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-st}(1-\tfrac{1}{2}t)\,dt\\ &= -\frac{1}{s}e^{-st}\big(1-\tfrac{1}{2}t\big)\Big|_{t=0}^{1} - \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \Big(-\frac{e^{-s}}{2s} + \frac{1}{s}\Big) + \frac{e^{-st}}{2s^2}\Big|_{t=0}^{1}\\ &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{2s} + \frac{e^{-s}-1}{2s^2}\end{aligned}$$

der vi brukte delvis integrasjon $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ med $u = 1 - \frac{1}{2}t$ og $dv = e^{-st}\,dt$.

$\boxed{20}$ Vi skal finne den inverse Laplacetransformasjonen til funksjonen

$$F(s) = \frac{s-4}{s^2-4}.$$

Omformer uttrykket

$$F(s) = \frac{s}{s^2-4} - \frac{4}{s^2-4} = \frac{s}{s^2-2^2} - 2\frac{2}{s^2-2^2},$$

og en sammenligning med tabell 5.1 gir da at

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \cosh 2t - 2\sinh 2t$$

$\boxed{29}$ Vi skal finne Laplacetransformasjonen til funksjonen gitt ved

$$f(t) = t^2e^{-3t} = g(t)e^{at},\ \text{der } g(t) = t^2, a = -3.$$

Ved første skifteteorem blir

$$F(s) = \frac{2}{(s-a)^3} = \frac{2}{(s+3)^3},$$

ettersom $\mathcal{L}(t^2) = 2/s^3$ (jf. tabell 5.1).

33 Vi skal finne

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh t \cos t\} &= \mathcal{L}\{\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\cos t\}\\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t \cos t\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\cos t\}\end{aligned}$$

Ved første skiftteorem:

$$\mathcal{L}\{\sinh t \cos t\} = \frac{1}{2}\frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1},$$

som med litt algebraakrobatikk lar seg omforme til

$$\frac{s^2-2}{s^4+4}$$

39 Vi omskriver telleren slik at hele brøken blir en funksjon av $\left(s+\frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}.$$

Da kan vi bruke tabell 5.1, Kreyszig s. 254, til å finne den inverse Laplacetransformerte. Ved hjelp av formlene 11 og 12 (med $a = -1/2$ og $\omega = 1$) får vi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}\right\} = e^{-t/2}\cos t - \tfrac{1}{2}e^{-t/2}\sin t.$$

Alternativt kan vi bruke transformasjonsregelen $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$ (første forskyvningsregel/skiftteorem, Kreyszig 5.1 teorem 2) med $a = -1/2$ for å finne den inverse Laplacetransformerte. Her er

$$F\left(s+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1} \qquad \text{og følgelig} \qquad F(s) = \frac{s-\frac{1}{2}}{s^2+1},$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}\right\} = \cos t - \tfrac{1}{2}\sin t$$

siden $\mathcal{L}^{-1}\left\{s/(s^2+1)\right\} = \cos t$ og $\mathcal{L}^{-1}\left\{1/(s^2+1)\right\} = \sin t$. Dermed er

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s+\tfrac{1}{2})\right\} = e^{-t/2}f(t) = e^{-t/2}\left(\cos t - \tfrac{1}{2}\sin t\right).$$

Fra Kreyszig, avsnitt 5.2

4 Vi skal løse

$$y'' - y' - 2y = 0$$

med initialbetingelser

$$y(0) = 8, y'(0) = 7$$

ved å benytte Laplacetransformen. La

$$Y \equiv \mathcal{L}\{y\}.$$

Da har vi videre at

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'\} &= sY - y(0) = sY - 8\\ \mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y - 8s - 7.\end{aligned}$$

Med dette transformerer vi ligningen vi startet med:

$$s^2Y - 8s - 7 - (sY - 8) - 2Y = 0 \tag{1}$$

$$Y = \frac{8s-1}{s^2-s-2} = \frac{8s-1}{(s+1)(s-2)} \tag{2}$$

Delbrøkoppspalter $Y(s)$ og finner at:

$$Y = \frac{3}{s+1} + \frac{5}{s-2}.$$

Vi kan nå enkelt inverstransformere Y ved å bruke første skiftteorem og at $\mathcal{L}\{1/s\} = 1$ og finner at:

$$y(t) = 3e^{-t} + 5e^{2t}$$

19 Her bruker vi tabell 5.1 (Kreyszig s. 254) og varianten (9) av Teorem 3, Kreyszig s. 262 (Integralregelen), 2 ganger for å finne den inverse Laplacetransformerte:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9(s+1)}{s^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9s}{s^2+3^2} + \frac{3\cdot 3}{s^2+3^2}\right\} = 9\cos 3t + 3\sin 3t \qquad \text{(Tabell 5.1)}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{9(s+1)}{s^2+9}\right)\right\} &= \int_0^t (9\cos 3\tau + 3\sin 3\tau)\,d\tau \qquad \text{(Teorem 3)}\\ &= \Big[3\sin 3\tau - \cos 3\tau\Big]_0^t = 3\sin 3t - \cos 3t + 1\\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s^2}\left(\frac{s+1}{s^2+9}\right)\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{9(s+1)}{s(s^2+9)}\right)\right\}\\ &= \int_0^t (3\sin 3\tau - \cos 3\tau + 1)\,d\tau \qquad \text{(Teorem 3)}\\ &= \Big[-\cos 3\tau - \frac{1}{3}\sin 3\tau + \tau\Big]_0^t = 1 + t - \cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t\end{aligned}$$

Vi kunne også brukt delbrøkoppspalting og deretter tabell 5.1 for å finne den inverse Laplacetransformerte her. Men i oppgaveteksten står det at vi skal bruke Integralregelen.