Fra Kreyszig, avsnitt 5.3

$\boxed{6}$ $f(t) = e^{-2t}u(t-3)$

Vi gir tre forskjellige måter å finne $F(s)$:

1 - DIREKTE UTREGNING

$$F(s) = \int_3^\infty \underbrace{e^{-2t}e^{-st}}_{e^{-t(s+2)}} dt = \left[\frac{e^{-t(s+2)}}{-(s+2)}\right]_{t=3}^\infty = \frac{e^{-3(s+2)}}{s+2}, \text{ der } s > -2.$$

2 - FØRSTE SKIFTTEOREM

$$\mathcal{L}\{u(t-3)\} = \frac{e^{-3s}}{s}$$

Innsatt i første skiftteorem (Kreyszig 8 s.253) gir:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t-3)\} = \frac{e^{-3(s+2)}}{s+2}$$

3 - ANDRE SKIFTTEOREM

Skriver om $f(t)$ slik at vi får $t-3$ overalt:

$$f(t) = e^{-6}e^{-2(t-3)}u(t-3)$$
$$F(s) = e^{-6}\mathcal{L}\{e^{-2(t-3)}u(t-3)\} = e^{-6}e^{-3s}\underbrace{\mathcal{L}\{e^{-2t}\}}_{\frac{1}{s+2}} = \frac{e^{-3(s+2)}}{s+2}$$

$\boxed{10}$

$$f(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{for } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{elles} \end{cases}$$

Me utnyttar sprangfunksjonen $u(t)$ og skriv $f(t) = (1-e^{-t})(u(t)-u(t-2))$. Vidare veit me at $u(t-2)e^{-t} = e^{-2}u(t-2)e^{-(t-2)}$, slik at me kan finna den Laplacetransformerte ved å nytta transformasjonsregelen $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = F(s)e^{-as}$ (2. skiftteorem/forskyvningsregel, Kreyszig s. 267 teorem 1).

$$\begin{aligned} f(t) &= (1-e^{-t})(u(t)-u(t-2)) \\ &= u(t) - u(t)e^{-t} - u(t-2) + e^{-2}u(t-2)e^{-(t-2)}. \end{aligned}$$

Dette gjev oss når me bruker formel 6 i tabell 5.1 s. 254 i Kreyszig

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t)e^{-t}\} - \mathcal{L}\{u(t-2)\} + e^{-2}\mathcal{L}\{u(t-2)e^{-(t-2)}\} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-2s}}{s} + e^{-2}e^{-2s}\frac{1}{s+1} \\
&= \frac{1}{s}(1-e^{-2s}) + \frac{1}{s+1}(e^{-2(s+1)}-1).
\end{aligned}$$

Oppgåva kan også løysast ut frå definisjonen av den Laplacetransformerte.

16 Vi skal finne invers Laplacetransformasjon til funksjonen

$$F(s) = e^{-3s}\frac{1}{(s-1)^3} = \frac{1}{2}e^{-3s}\frac{2}{(s-1)^3}.$$

Bruker andre skiftteorem med $a = 3$ og at $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{(s-1)^3}\} = e^t t^2$ og får at

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2}e^{t-3}(t-3)^2 u(t-3).$$

23

$$y'' + 9y = r(t) = \begin{cases} 8\sin t & \text{for } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{for } t > \pi, \end{cases} \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 4$$

Vi har

$$r(t) = 8\sin t - 8\sin t\, u(t-\pi) = 8\sin t + 8\sin(t-\pi)u(t-\pi)$$

siden $\sin t = -\sin(t-\pi)$, og bruker Tabell 5.1 (Kreyszig s. 254) og 2. skiftteorem (Teorem 1, Kreyszig s. 267) for å Laplacetransformere $r(t)$. Den Laplacetransformerte ligningen blir følgelig

$$s^2Y - 4 + 9Y = \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{8}{s^2+1} + \frac{8}{s^2+1}e^{-\pi s}.$$

Vi løser ut Y, og omformer ved å bruke delbrøkoppspalting:

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{4}{s^2+9} + \frac{8}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{8}{(s^2+1)(s^2+9)}e^{-\pi s} \\
&= \frac{4}{s^2+9} + \Big(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}\Big) + \Big(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}\Big)e^{-\pi s} \\
&= \frac{1}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+3^2} + \Big(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{3}{s^2+3^2}\Big)e^{-\pi s}.
\end{aligned}$$

(En liten snarvei i delbrøkoppspaltingen er å legge merke til at vi ikke har førstegradsledd i brøken $8/[(s^2+1)(s^2+9)]$ som skal delbrøkoppspaltes. Setter vi $u = s^2$, kan vi skrive

$$\frac{8}{(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{8}{(u+1)(u+9)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+9}.$$

Vi regner ut $A = 1$ og $B = -1$ og dermed blir $8/[(s^2+1)(s^2+9)] = 1/(s^2+1) - 1/(s^2+9)$.)

Tilslutt bruker vi igjen Tabell 5.1 og 2. skiftteorem for å finne $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$:

$$\begin{aligned}
y &= \sin t + \sin 3t + [\sin(t-\pi) - \tfrac{1}{3}\sin 3(t-\pi)]u(t-\pi) \\
&= \sin t + \sin 3t + [-\sin t + \tfrac{1}{3}\sin 3t]u(t-\pi) = \begin{cases} \sin t + \sin 3t & \text{for } 0 < t < \pi \\ \tfrac{4}{3}\sin 3t & \text{for } t > \pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

(Merk at $\sin(t-\pi) = -\sin t$ og $\sin 3(t-\pi) = \sin 3t\cos 3\pi - \cos 3t \sin 3\pi = -\sin 3t$.)

Fra Kreyszig, avsnitt 5.4

$\boxed{6}$ Vi skal finne $\mathcal{L}(t^2 \sin 2t)$ ved hjelp av formelen (1) $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$, Kreyszig s. 275. Siden $\mathcal{L}(\sin 2t) = 2/(s^2+4)$ får vi, ved å bruke formel (1) 2 ganger,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t \sin 2t) &= -\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4} = \frac{4s}{(s^2+4)^2} \\
\mathcal{L}(t^2 \sin 2t) &= \mathcal{L}\{t(t \sin 2t)\} = -\frac{d}{ds}\frac{4s}{(s^2+4)^2} \\
&= -\frac{(s^2+4)^2 \cdot 4 - 2(s^2+4)2s \cdot 4s}{(s^2+4)^4} = \frac{4(3s^2-4)}{(s^2+4)^3}.
\end{aligned}$$

Fra Kreyszig, avsnitt 5.5

$\boxed{8}$ Vi skal finne $u(t-1) * t^2$. Setter inn i definisjonen av konvolusjonsprodukt:
For $t \geqq 1$

$$\begin{aligned}
u(t-1) * t^2 &= \int_0^t u(\tau-1)(t-\tau)^2 d\tau = \int_1^t (t-\tau)^2 d\tau \\
&= \frac{1}{3}(t^3 - 3t^2 + 3t - 1)
\end{aligned}$$

For $t < 1$

$$u(t-e) * t^2 = 0$$

Merk: En kan lett sjekke at en får samme svar om en istedet beregner det ekvivalente uttrykket

$$u(t-1) * t^2 = \int_0^t u(t-\tau-1)\tau^2 d\tau$$

.

$\boxed{15}$ Vi skal finne $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2+\pi^2)^2\}$ ved å bruke konvolusjon. Vi merker oss først at

$$\frac{s}{(s^2+\pi^2)^2} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{s^2+\pi^2} \cdot \frac{s}{s^2+\pi^2}$$

og vet at $\mathcal{L}^{-1}\{\pi/(s^2+\pi^2)\} = \sin \pi t$ og $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2+\pi^2)\} = \cos \pi t$ (Tabell 5.1, Kreyszig s. 254). Følgelig får vi, ved konvolusjonsregelen (Teorem 1, Kreyszig s. 279),

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{\pi}{s^2+\pi^2} \cdot \frac{s}{s^2+\pi^2}\Big\} = \frac{1}{\pi}\sin \pi t * \cos \pi t = \frac{1}{\pi}\int_0^t \sin \pi v \, \cos \pi(t-v)\, dv.$$

For å regne ut integralet kan vi bruke den trigonometriske identiteten

$$\sin A \cos B = \tfrac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)] \qquad \text{(jf. Rottmann s. 88)}$$

med $A = \pi v$, $B = \pi(t-v)$ og følgelig $A + B = \pi t$, $A - B = \pi(2v - t)$. Det gir

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^t \sin \pi v \cos \pi(t-v)\, dv = \frac{1}{2\pi}\int_0^t [\sin \pi t + \sin \pi(2v-t)]\, dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[v \sin \pi t - \frac{1}{2\pi}\cos \pi(2v-t)\Big]_{v=0}^t \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\Big(t \sin \pi t - \frac{1}{2\pi}\cos \pi t\Big) - \Big(-\frac{1}{2\pi}\cos(-\pi t)\Big)\Big] = \frac{t}{2\pi}\sin \pi t
\end{aligned}$$

der vi i siste linje forenklet svaret ved å bruke $\cos(-\pi t) = \cos \pi t$.

$\boxed{32}$ Vi skal løse integralligningen

$$y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau = \sin t + (y * \sin)(t).$$

Ved laplacetransformasjon får vi:

$$Y = \frac{1}{s^2+1} + Y\frac{1}{s^2+1}$$
$$\Rightarrow \quad s^2 Y = 1 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = t$$