Fra Kreyszig, avsnitt 5.5

25 Initialverdiproblemet er:

$$y'' + y = r \quad , \quad r(t) = \begin{cases} t & ,1 < t < 2 \\ 0 & ,\text{ellers} \end{cases}$$
$$y(0) = y'(0) = 0$$

Vi laplacetransformerer ligningen, og får

$$s^2Y - s \cdot 0 - 0 + Y = \mathcal{R} \quad , \quad \mathcal{R} = r \Rightarrow Y = \frac{1}{s^2+1}\mathcal{R} = r \cdot \sin t$$

Ved inverstransformasjon får vi

$$y(t) = (r * \sin)(t) = \int_0^t r(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau.$$

Det blir tre tilfeller:

$$\begin{array}{rcll} 0 < t < 1 & : & r(\tau) = 0 & \Rightarrow \; y(t) = \int_0^t 0 \cdot \sin(t-\tau)\,d\tau = 0 \\ 1 < t < 2 & : & r(\tau) = u(\tau - 1) & \Rightarrow \; y(t) = \int_1^t \tau \sin(t-\tau)\,d\tau \\ 2 < t & : & r(\tau) = u(\tau-1) - u(\tau-2) & \Rightarrow \; y(t) = \int_1^2 \tau\sin(t-\tau)\,d\tau \end{array}$$

Vi trenger integralet

$$\int \tau \sin(t-\tau)\,d\tau = \tau \cdot \cos(t-\tau) - \int \cos(t-\tau)\,d\tau = \tau\cos(t-\tau) + \sin(t-\tau) + C$$

Vi setter dette inn, og får svaret

$$y(t) = \begin{cases} 0 & ,0 < t < 1 \\ t - \cos(t-1) - \sin(t-1) & ,1 \le t < 2 \\ 2\cos(t-2) + \sin(t-2) - \cos(t-1) - \sin(t-1) & ,2 \le t \end{cases}$$

Fra Kreyszig, avsnitt 5.6

3 Vi søker $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ for $F(s) = (s^2+9s-9)/(s^3-9s)$ og delbrøkoppspalter

$$F(s) = \frac{s^2+9s-9}{s^3-9s} = \frac{s^2+9s-9}{s(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+3}.$$

For å bestemme A, B, C, multipliserer vi med fellesnevneren $s(s-3)(s+3)$. Det gir

$$s^2 + 9s - 9 = A(s-3)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s-3).$$

Så setter vi inn $s = 0$, $s = 3$, $s = -3$, og får

$$-9 = A \cdot (-9),\ A = 1; \qquad 27 = B \cdot 18,\ B = 3/2; \qquad -27 = C \cdot 18,\ C = -3/2.$$

Dermed blir

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3/2}{s-3} - \frac{3/2}{s+3} \quad \text{og følgelig} \quad f(t) = 1 + \tfrac{3}{2}e^{3t} - \tfrac{3}{2}e^{-3t} = 1 + 3\sinh 3t.$$

$\boxed{5}$ Spalter opp i delbrøker:

$$\frac{2s^3}{s^4-81} = \frac{2s^3}{(s^2+9)(s^2-9} = \frac{2s^3}{(s+3)(s-3)(s^2+9} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-3} + \frac{C+Ds}{s^2+9}$$

Multipliserer med fellesnevneren for å finne koeffisientene A, B, C og D og får følgende likning:

$$\begin{aligned} 2s^3 &= A(s+3)(s^2+9) + B(s-3)(s^2+9) + (C+Ds)(s^2-9) \\ &= A(s^3+3s^2+9s+27) + B(s^3-3s^2+9s-27 + C(s^2-9) + D(s^2-9s) \\ &= s^3(A+B+D) + s^2(3A-3B+C) + s(9A+9B-9D) + 27A - 27B - 9C \end{aligned}$$

Sammenligner koeffisientene på venstre og høyre side

$$\begin{aligned} A + B + D &= 2 \\ 3A - 3B + C &= 0 \\ 9A + 9B - 9D &= 0 \\ 3A - 3B - C &= 0 \end{aligned}$$

Ved å løse disse fire likningene får vi $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = 0, D = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3}{s^4-81}\right\} &= \frac{1}{2}\left(e^{3t} + e^{-3t}\right) + \cos 3t \\ &= \cosh 3t + \cos 3t \end{aligned}$$

Fra Kreyszig, avsnitt 5.7

$\boxed{3}$ Vi skal løse initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 4y_2, \qquad & y_1(0) = 3 \\ y_2' &= 3y_1 - 2y_2, \qquad & y_2(0) = 4 \end{aligned}$$

Vha. derivasjonsreglen for Laplacetransformer (Teorem2, Kreyszig s. 259) får vi:

$$\begin{aligned} &sY_1 - 3 = -Y_1 + 4Y_2 \\ &sY_2 - 4 = 3Y_1 - 2Y_2\,; \qquad \mathcal{L}\{y_i\} = Y_i, \quad i = 1,2 \end{aligned}$$

Vi løser ut Y_2 i den øverste ligningen og får

$$Y_2 = \frac{1}{4}\left[(s+1)Y_1 - 3\right]$$

Setter deretter dette inn i den nederste ligningen:

$$\frac{s}{4}\left[(s+1)Y_1-3\right]-4=3Y_1-\frac{2}{4}\left[(s+1)Y_1-3\right]$$
$$\Updownarrow$$
$$(s^2+3s-10)Y_1=3s+22$$
$$\Updownarrow$$
$$Y_1=\frac{3s+22}{(s-2)(s+5)}$$

Delbrøkoppspalting gir

$$Y_1=\frac{4}{s-2}-\frac{1}{s+5}$$

Invers Laplacetransformasjon gir

$$y_1=4e^{2t}-e^{-5t}$$

Setter dette inn i den første uttrykket og får:

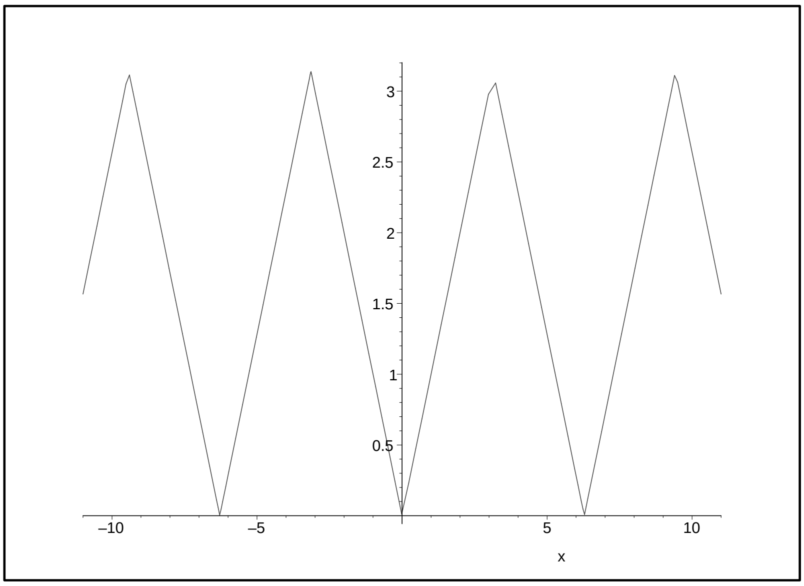
$$Y_2=\frac{1}{4}\left[(s+1)Y_1-3\right]=\frac{1}{4}\left[(s+1)\left(\frac{4}{s-2}-\frac{1}{s+5}\right)-3\right]$$
$$=1+\frac{3}{s-2}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{s+5}\right)-\frac{3}{4}=\frac{3}{s-2}+\frac{1}{s+5}$$

Invers transformasjon gir dermed

$$y_2=3e^{2t}+e^{-5t}$$

Fra Kreyszig, avsnitt 10.1

$\boxed{9}$ Funksjonen ser slik ut:

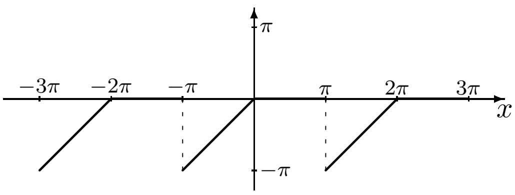


$\boxed{13}$

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{for } -\pi\le x\le 0\\ 0 & \text{for } 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$f(x+2\pi)=f(x)\quad$ for alle x

Grafen er tegnet for $-3\pi\le x\le 3\pi$



Fra Kreyszig, avsnitt 10.2

$\boxed{7}$ Vi skal finne Fourier-rekka til $f(x)$ der $f(x)$ er periodisk med periode $p = 2\pi$ og gitt ved

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi.$$

Formler finner vi på s.531 i Kreyszig (8. utgave).

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi n}\left[x^2\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}[x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{n^2}\cos(nx)\,dx}_{=0} \\
&= 0 - 0 + \frac{2}{\pi n^2}(\pi\cos(\pi n) - -\pi\cos(-\pi n)) \\
&= \frac{4}{n^2}\cos(\pi n) = (-1)^n\frac{4}{n^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(nx)\,dx = \left[-\frac{1}{n}x^2\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{n}x\cos(nx)\,dx \\
&= -\frac{1}{n}(\pi^2\cos(\pi n) - \pi^2\cos(-\pi n) + \frac{2}{n^2}\left[x\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{n^2}\sin(nx)\,dx}_{=0} \\
&= -\frac{1}{n}(0) + \frac{2}{n^2}(\pi\sin(\pi n) - -\pi\sin(-\pi n)) \\
&= 0 \quad \text{(noe vi visste siden } f(x) \text{ er like (even))}
\end{aligned}$$

Vi får

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} - 4(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - +...)$$

Jeg har tegnet opp den 1.,2.,3. og 100. partialsummen, henholdsvis S_1, S_2, S_3, S_{100}.