NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4130 Matematikk 4N
høsten 2005

Løsningsforslag - Øving 4

Fra Kreyszig, avsnitt 10.3

1 Funksjonen har periode $p = 2L = 2$ og er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{for } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Fourierkoeffisientene blir

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \text{ siden } f(x) \text{ er en odde funksjon.}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx = 0$$

siden $f(x)\cos n\pi x$ blir odde da $f(x)$ er odde mens $\cos n\pi x$ er like.

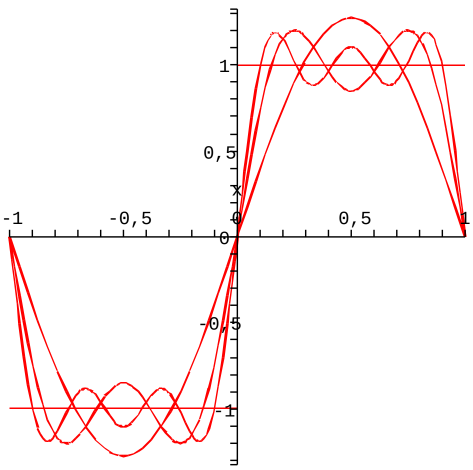
For b_n-koeffisientene får vi

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx = 2\int_{0}^{1}\sin n\pi x\,dx = -\frac{2\cos n\pi x}{n\pi}\bigg|_0^1 \\ &= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{for like n;} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{for odde n.} \end{cases} \end{aligned}$$

Fourierrekka til $f(x)$ blir altså

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin \pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\sin 5\pi x + \dots\right)$$

Grafen til $f(x)$ og de tre første partialsummene i Fourierrekka til $f(x)$ er tegnet over intervallet $-1 \le x \le 1$:



$\boxed{5}$ Vi skal finne Fourierrekken til den 2-periodiske funksjonen $f(x) = 2x$, $-1 < x < 1$. Bruker formel (2) i Kreyszig s. 537 med $L = 1$:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2x dx = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} 2x\cos(n\pi x)dx = \left[\frac{2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) + \frac{2x}{n\pi}\underbrace{\sin(n\pi x)}_{\text{null bidrag}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - \cos n\pi) = 0$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} 2x\sin(n\pi x)dx = \left[\frac{2}{n^2\pi^2}\underbrace{\sin(n\pi x)}_{\text{null bidrag}} - \frac{2x}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_{-1}^{1}$$

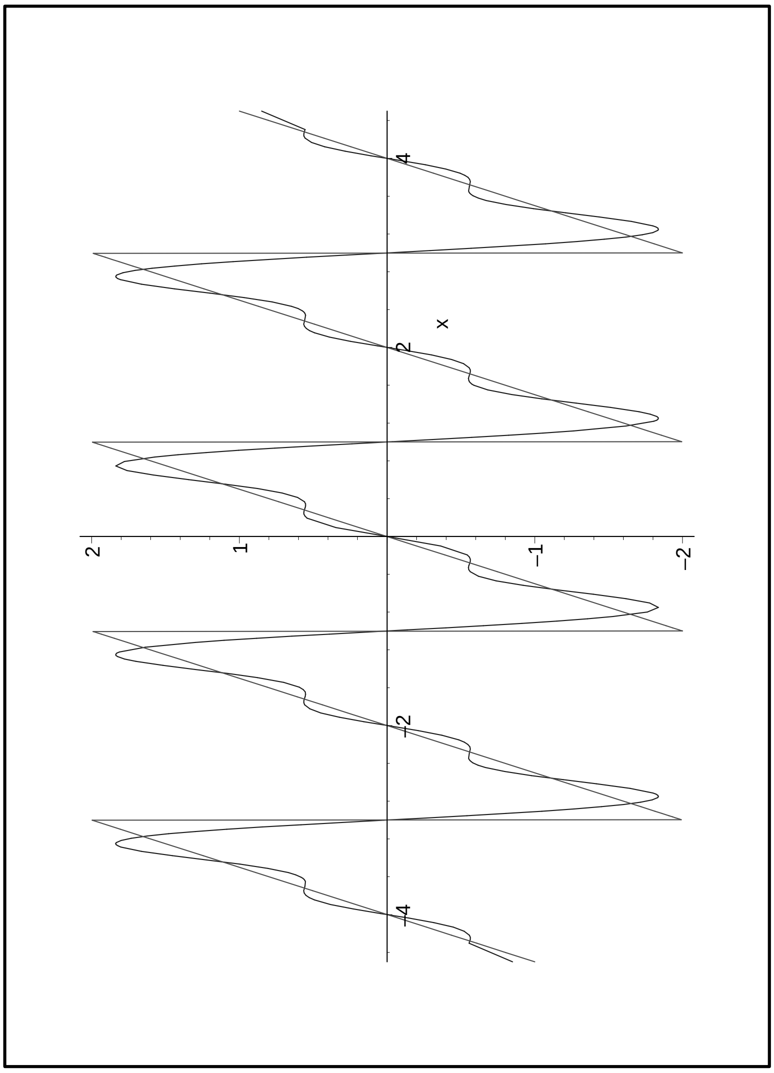
$$= \frac{-2}{n\pi}\left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} + \underbrace{\cos(-n\pi)}_{=(-1)^n}\right) = -4\frac{1}{n\pi}(-1)^n = 4\frac{1}{n\pi}(-1)^{n+1},$$

der vi har brukt integrasjonsformler på side 144 i Rottmann. Vi skal senere se at vi kunne sett resultatene $a_0 = a_n = 0$ direkte ved å observere at $f(x)$ er en odde funksjon.

Fourierrekken blir dermed:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)$$

$f(x)$ plottet sammen med tredje partialsum i Fourierrekken:



9 Vi søker Fourierrekka for den periodiske funksjonen $f(x)$ gitt ved

$$f(x) = 0 \quad \text{for } -1 < x < 0, \qquad f(x) = x \quad \text{for } 0 < x < 1, \qquad \text{periode } p = 2L = 2.$$

Eulerformlene for Fourierkoeffisientene, Kreyszig s.537/Rottman s.175, med $L = 1$ gir

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx = \int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = \frac{x\sin n\pi x}{n\pi} + \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\bigg|_0^1 = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx = \int_0^1 x\sin n\pi x\,dx = -\frac{x\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\bigg|_0^1 = \frac{-\cos n\pi}{n\pi}$$

ved delvis integrasjon både i a_n- og b_n-integralet. Følgelig er

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ partall} \\ -2/n^2\pi^2 & \text{for } n \text{ odde,} \end{cases} \qquad b_n = \frac{-(-1)^n}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

og $f(x)$ har Fourierrekke

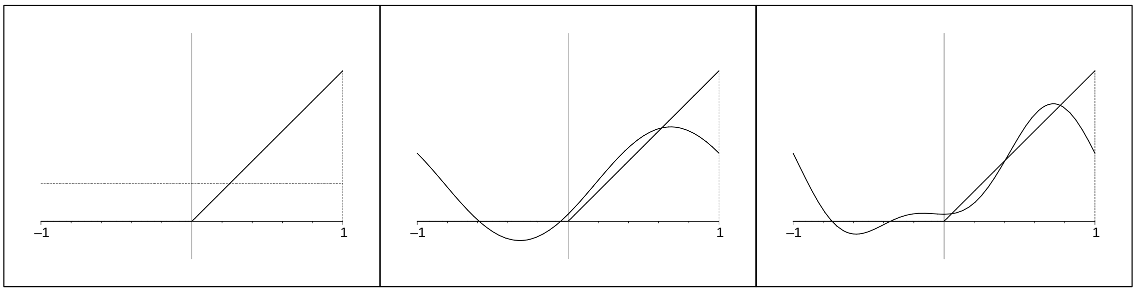
$$\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\left(\cos\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \cdots\right) + \frac{1}{\pi}\left(\sin\pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + - \cdots\right).$$

Grafen til $f(x)$ og de tre første partialsummene

$$S_0(x) = \frac{1}{4}, \qquad S_1(x) = \frac{1}{4} + \Big(-\frac{2}{\pi^2}\cos\pi x + \frac{1}{\pi}\sin\pi x\Big)$$
$$S_2(x) = \frac{1}{4} + \Big(-\frac{2}{\pi^2}\cos\pi x + \frac{1}{\pi}\sin\pi x\Big) + \Big(-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\Big)$$

er tegnet for $-1 < x < 1$:

$f(x)$ og $S_0(x)$ $\qquad$ $f(x)$ og $S_1(x)$ $\qquad$ $f(x)$ og $S_2(x)$



Fra Kreyszig, avsnitt 10.4

$\boxed{2}$ Jamne funksjonar: $|x|$, e^{x^2}, $\sin^2 x$, $x\sin x$, $e^{-|x|}$.
Odde: $x\cos x$.
(Metode: Sjekk om $f(-x) = f(x)$ (jamn) eller $f(-x) = -f(x)$ (odde).)

$\boxed{15}$ Vi skal finne Fourierrekka til den 2π-periodiske funksjonen $f(x) = x^2/2,\ -\pi < x < \pi$.

Siden $f(x)$ er en like funksjon, blir dette ei Fouriercosinusrekke der Fourierkoeffisientene er gitt ved ($L = \pi$)

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{2}\cos nx\,dx \qquad \text{(Rottm. s.144 formel 124)}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2-n^2x^2}{n^3}\sin nx\right]_0^\pi = \frac{2\cos n\pi}{n^2} = 2\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad n \ge 1.$$

La for enkelthets skyld $f((2k+1)\pi) = \pi^2/2,\ k \in \mathbf{Z}$. Da er $f(x)$ kontinuerlig overalt, og $f(x)$ har venstre- og høyresidige deriverte i punktene $x = (2k+1)\pi$ (de eneste punktene der f' er diskontinuerlig). Dermed gir teorem 1, s. 535 i Kreyszig (8. utgave) at

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

for alle $x \in \mathbf{R}$.

$\boxed{19}$ Vi fant i oppgave 10.4.15 at den 2π-kontinuerlige funksjonen $f(x) = x^2/2,\ -\pi < x < \pi$ beskrives av fourierrekka

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

For $x = 0$ får vi (ettersom f er kontinuerlig omkring $x = 0$, gjelder likheten)

$$f(0) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 2\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \ldots\right)$$

Idet vi har at $f(0) = 0$, får vi ligningen

$$\frac{\pi^2}{6} - 2\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \ldots\right) = 0$$
$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi^2}{12}$$

$\boxed{23}$ Vi skal finne cosinusrekka og sinusrekka for funksjonen $f(x) = \pi - x$, $0 < x < L = \pi$. Av formlene i Kreyszig s. 542 / Rottman s. 175 (med $L = \pi$) får vi

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-1}{2}(\pi - x)^2\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{og, ved delvis integrasjon,}$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n}\,dx\right] = \frac{2(1 - \cos n\pi)}{n^2\pi}.$$

Når n er partall er $\cos n\pi = 1$ og følgelig $a_n = 0$. Når n er oddetall er $\cos n\pi = -1$ og følgelig $a_n = 4/(n^2\pi)$. Dermed har $f(x)$ cosinusrekke

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

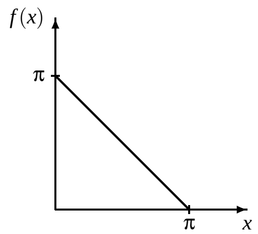
For koeffisientene i sinusrekka får vi, igjen ved delvis integrasjon,

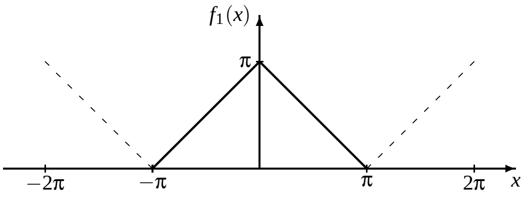
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\,dx}_{0}\right] = \frac{2}{n}.$$

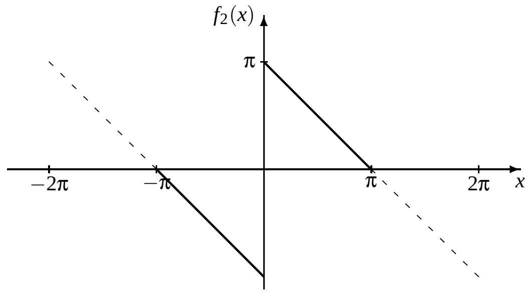
Dermed har $f(x)$ sinusrekke

$$f(x) = 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Grafen til $f(x)$ er tegnet på figuren til høyre.
Nedenfor er grafen til $f_1(x)$ og $f_2(x)$, den jevne hhv. odde 2π-periodiske utvidelsen av $f(x)$ tegnet for $-2\pi \le x \le 2\pi$.
Den jevne hhv. odde utvidelsen av $f(x)$ til $-\pi \le x \le \pi$ er heltrukket, og den periodiske utvidelsen til $-2\pi \le x \le 2\pi$ er stiplet.







Eksamensoppgaver

$\boxed{3}$ **a)** Fra Rottmann (appendiks) har vi at Fourier-sinusrekken er ($L = 1$ her)

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

der

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx.$$

Disse integralene kan vi regne ut med delvis integrasjon (eller vi kan bruke Rottmann, hvor de ubestemte integralene $\int x\sin(ax)\,dx$ og $\int x^2\sin(ax)\,dx$ står oppført [a en vilkårlig konstant]). La oss bruke delvis integrasjon direkte:

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 f(x)g'(x),\,dx && \Big(f(x)=x(1-x),\quad g'(x)=\sin(n\pi x)\Big)\\
&= 2\left[f(x)g(x)\right]\Big|_0^1 - 2\int_0^1 f'(x)g(x)\,dx && \Big(f'(x)=1-2x,\quad g(x)=\frac{-1}{\pi n}\cos(n\pi x)\Big)\\
&= \frac{2}{\pi n}\int_0^1 (1-2x)\cos(n\pi x)\,dx\\
&= \frac{2}{\pi n}\int_0^1 u(x)v'(x),\,dx && \Big(u(x)=1-2x,\quad v'(x)=\cos(n\pi x)\Big)\\
&= \frac{2}{\pi n}\left[u(x)v(x)\right]\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx && \Big(u'(x)=-2,\quad v(x)=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big)\\
&= -\frac{2}{\pi n}\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx\\
&= \frac{4}{(\pi n)^2}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx\\
&= \frac{4}{(\pi n)^3}\left[-\cos(n\pi x)\right]\Big|_0^1\\
&= \frac{4}{(\pi n)^3}\left[1-\cos(n\pi)\right]\\
&= \frac{4}{(\pi n)^3}\left[1-(-1)^n\right].
\end{aligned}$$

Svaret er derfor

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left[1-(-1)^n\right]}{(\pi n)^3}\sin(n\pi x).$$

Alternativt: Siden

$$b_n = \begin{cases}\frac{8}{(n\pi)^3} & \text{for } n = 1,3,\ldots,\\ 0 & \text{for } n = 2,4,\ldots,\end{cases}$$

kan vi også uttrykke svaret som følger:

$$\frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\sin(x)}{1^3}+\frac{\sin(3x)}{3^3}+\frac{\sin(5x)}{5^3}+\cdots\right).$$

b) Fra punkt (a) har vi, for $0 \le x \le 1$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4[1-(-1)^n]}{(\pi n)^3}\sin(n\pi x) = \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\sin(x)}{1^3}+\frac{\sin(3x)}{3^3}+\frac{\sin(5x)}{5^3}+\cdots\right) \qquad (*)$$

At vi har likhet her, følger fra konvergenskriteriet for Fourierrekker, for Fourier-sinusrekken er rett og slett Fourierrekken til den *odde periodiske utvidelsen* av $f(x)$ med periode 2, og denne utvidelsen er kontinuerlig overalt (tegn grafen!), og har høyre- og venstrederiverte i hvert punkt. (Den er faktisk kontinuerlig deriverbar.) [Merk: Strengt tatt er det kun nødvendig å begrunne at vi har likhet i $(*)$ for den spesielle x-verdien vi skal sette inn, nemlig $x = 1/2$.]

For å få fortegnet til å alternere mellom $+$ og $-$, som i den rekken vi skal finne summen av, må vi velge en passende x i $(*)$. Vi velger $x = 1/2$, fordi

$$\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{for } n = 2, 4, \ldots,, \\ +1 & \text{for } n = 1, 5, \ldots,, \\ -1 & \text{for } n = 3, 7, \ldots,, \end{cases}$$

Vi får altså:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} = \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - + \cdots\right)$$

som gir det endelige svaret:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \cdots = \frac{\pi^3}{32}.$$