Fra Kreyszig, avsnitt 11.1

3

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin 9t \sin \tfrac{1}{4}x) = \frac{\partial}{\partial x}(\tfrac{1}{4}\sin 9t \cos \tfrac{1}{4}x) \\ &= -\frac{1}{16}\sin 9t \sin \tfrac{1}{4}x = -\tfrac{1}{16}u \\ u_{tt} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\sin 9t \sin \tfrac{1}{4}x) = \frac{\partial}{\partial t}(9 \sin 9t \sin \tfrac{1}{4}x \\ &= -81 \sin 9t \sin \tfrac{1}{4}x = -81u \end{aligned}$$

Dermed er $\frac{u_{tt}}{u_{xx}} = \frac{81}{36} = 1296$ eller

$$u_{tt} = 1296 u_{xx}$$

Fra Kreyszig, avsnitt 11.3

17 Vi skal bruke metoden med separasjon av variable (produktmetoden) til å finne løsninger av den partielle differensialligningen $u_{xy} - u = 0$.

Vi setter $u(x,y) = F(x)G(y)$ inn i differensialligningen $u_{xy} = u$, får

$$F'(x)G'(y) = F(x)G(y) \quad \text{og omformer til} \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{G(y)}{G'(y)}.$$

Her avhenger venstresiden bare av x og høyresiden bare av y. Følgelig må uttrykket være konstant, $F'(x)/F(x) = G(y)/G'(y) = k$. Det gir to ordinære differensialligninger

$$F'(x) - kF(x) = 0 \qquad \text{og} \qquad kG'(y) - G(y) = 0$$

som begge er lineære. Differensialligningen $y' + ay = 0$ har generell løsning $y = Ce^{-ax}$. Følgelig får vi her

$$F(x) = C_1 e^{kx} \qquad \text{og} \qquad G(y) = C_2 e^{y/k}.$$

Løsningene av $u_{xy} - u = 0$ av formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ blir dermed

$$u(x,y) = C_1 e^{kx} \cdot C_2 e^{y/k} = Ce^{kx + y/k}$$

der $C = C_1 \cdot C_2$ og $k \neq 0$ er vilkårlige konstanter.

Eksamensoppgaver

3 **(a)** Separasjon av variable:

$$u(x,t) = F(x)\cdot G(t) \quad \text{innsatt i (1):} \quad F''G = FG'' - 4FG$$

$$\frac{F''}{F} = \frac{G''}{G} - 4 = -\lambda \quad \text{(konstant)} \quad \text{som gir} \quad \begin{cases} F'' + \lambda F = 0 \\ G'' + (\lambda - 4)G = 0 \end{cases}$$

Randbetingelsene $F(0) = 0$ og $F(\pi) = 0$ fører, på vanlig måte, til ikke-trivielle løsninger for $F(x)$ når $\lambda = n^2, n = 1, 2, 3, \ldots$:
Setter vi inn $\lambda = n^2$ i ligningen for $G(t)$, får vi $G'' + (n^2 - 4)G = 0$.

$$F(x) = F_n(x) = \sin(nx), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Setter vi inn $\lambda = n^2$ i ligningen for $G(t)$, får vi $G'' + (n^2 - 4)G = 0$.

$n = 1:$ $\quad G'' - (\sqrt{3})^2 G = 0$

$\qquad G_1(t) = A_1 \cosh(\sqrt{3}t) + B_1 \sinh(\sqrt{3}t) \quad$ (eller $G_1(t) = C_1 e^{\sqrt{3}t} + D_1 e^{-\sqrt{3}t}$)

$n = 2:$ $\quad G'' = 0 \quad G_2(t) = A_2 + B_2 t$

$n = 3, 4, \cdots:$ $G'' + (\sqrt{n^2 - 4})^2 G = 0, \quad G_n(t) = A_n \cos(\sqrt{n^2 - 4}t) + B_n \sin(\sqrt{n^2 - 4}t)$

Produktløsningene blir da:

$$u_1(x, t) = [A_1 \cosh(\sqrt{3}t) + B_1 \sinh(\sqrt{3}t)] \sin x$$

$$u_2(x, t) = [A_2 + B_2 t] \sin 2x$$

$$u_3(x, t) = [A_n \cos(\sqrt{n^2 - 4}t) + B_n \sin(\sqrt{n^2 - 4}t)] \sin nx, \quad n = 3, 4, 5 \ldots$$

(b) Generell løsning

$$\begin{aligned} u(x, t) = {} & [A_1 \cosh(\sqrt{3}t) + B_1 \sinh(\sqrt{3}t)] \sin x + [A_2 + B_2 t] \sin 2x \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} [A_n \cos(\sqrt{n^2 - 4}t) + B_n \sin(\sqrt{n^2 - 4}t) \sin nx \end{aligned}$$

Vi bruker initialbetingelsene (2) til å bestemme A_n og B_n for $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$0 = u(x, 0) = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \textstyle\sum_{n=3}^{\infty} A_n \sin nx$$

Dermed er A_n for $n = 1, 2, 3, \ldots$, og

$$u(x, t) = B_1 \sinh(\sqrt{3}t) \sin x + B_2 t \sin 2x + \textstyle\sum_{n=3}^{\infty} B_n \sin(\sqrt{n^2 - 4}t) \sin nx$$

$$u_t(x, t) = \sqrt{3} B_1 \cosh(\sqrt{3}t) \sin x + B_2 \sin 2x + \textstyle\sum_{n=3}^{\infty} \sqrt{n^2 - 4} B_n \cos(\sqrt{n^2 - 4}) \sin nx$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = u_t(x, 0) = \sqrt{3} t B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \textstyle\sum_{n=3}^{\infty} \sqrt{n^2 - 4} B_n \sin nx$$

Dermed er $\sqrt{3} B_1 = 1, B_2 = 1, \sqrt{3^2 - 4} B_3 = 1$ og $\sqrt{n^2 - 4} B_n = 0$ for $n = 4, 5, 6, \ldots$.

Altså $B_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, B_2 = 1, B_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ og $B_n = 0$ for $n = 4, 5, 6, \ldots$, og løsningen blir

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh(\sqrt{3}t) \sin x + t \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(\sqrt{5}t) \sin 3x$$

$\boxed{4}$ **(a)** Vi setter $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 c^2 t} \sin nx$ og bestemmer B_n-ene.

$$f(x) \overset{(iii)}{=} u(x, o) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \text{ (for } 0 \le x \le \pi) \Rightarrow B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$
\begin{aligned}
B_n &= \tfrac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx\right)\\
&= \tfrac{2}{\pi}\left([-x\tfrac{\cos nx}{n} + \tfrac{\sin nx}{n^2}]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-(\pi - x)\tfrac{\cos nx}{n} - \tfrac{\sin nx}{n^2}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)\\
&= \tfrac{2}{\pi}\left([-\tfrac{\pi}{2}\tfrac{\cos n\pi/2}{n} + \tfrac{\sin n\pi/2}{n^2}] + \tfrac{\pi}{2}\tfrac{\cos(n\pi/2)}{n} + \tfrac{\sin(n\pi/2)}{n^2}\right)\\
&= \tfrac{4}{\pi}\tfrac{\sin(n\pi/2)}{n^2}
\end{aligned}
$$

Dermed får vi

$$B_n = 0 \text{ når } n = 2m \text{ og } B_n = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \text{ når } n = 2m+1$$

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}e^{-(2m+1)^2c^2t}\sin(2m+1)x \quad \text{oppfyller (i),(ii) og (iii)}$$

(b) Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i (i) og bruker randbetingelsen (iv).

$$FG' = c^2F''G \Rightarrow \frac{F''}{F} = \frac{G}{c^2G} = k \quad \text{(konstant)}$$

$$(I) \quad F'' - kF = 0, \quad F(0) = 0, \quad F'(\pi) = 0, \qquad (II) \quad G' - kc^2G = 0$$

Bestemmer først $F(x)$ og deretter $G(t)$

$$\text{(I)}F'' - kF = 0, \quad F(0) = 0, \quad F'(\pi) = 0$$

$$
\begin{aligned}
&k > 0, k = \mu^2: && F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}, \quad F'(x) = \mu Ae^{\mu x} - \mu Be^{-\mu x}\\
& && F(0) = F'(\pi) = 0 \Rightarrow A = B = 0, \quad F(x) = 0\\
&k = 0: && F(x) = A + Bx, \quad F'(x) = B\\
& && F(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad F'(\pi) = 0 \Rightarrow B = 0, \quad F(x) = 0\\
&k < 0, ke = -p^2: && F(x) = A\cos px + B\sin px, \quad F'(x) = -pA\sin px + pB\cos px\\
& && F(0) = 0 \Rightarrow A = 0, F'(\pi) = 0, \quad B \neq 0 \Rightarrow \cos p\pi = 0\\
& && p = (2m+1)/2, \quad F(x) = \sin[(2m+1)x/2] \quad (B = 1)
\end{aligned}
$$

$$\text{(II)}G' - kc^2G = 0$$

$$k = -(\frac{2m+1}{2})^2 \Rightarrow G' + \frac{c^2(2m+1)^2}{4}G = 0 \Rightarrow G(t) = Ce^{-c^2(2m+1)^2t/4}$$

Løsningene av (i) på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller (iv):

$$u(x,t) = Ce^{-c^2(2m+1)^2t/4}\sin\frac{(2m+1)x}{2}, \quad \text{C vilkårlig konstant, } m = 0, 1, 2, \ldots$$

$\boxed{5}$ **a)** Setter inn $u(x,y) = F(x)G(y)$ i (i) og bruker randbetingelsene (ii).

$F''G + FG'' = 0 \Rightarrow \frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = k$ (konstant)

(I) $F'' - kF = 0, \quad F'(0) \overset{(ii)}{=} 0, \quad F'(\pi) \overset{(ii)}{=} 0,$ (II) $G'' + kG = 0, \quad G(0) \overset{(ii)}{=} 0$

Bestemmer først $F(x)$ fra (I) og deretter $G(y)$ fra (II).

(I) $F'' - kF = 0, k$ vilkårlig konstant, $F'(0) = 0, F'(\pi) = 0$

$k > 0, k = \mu^2 :$ $F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}, \quad F'(x) = \mu Ae^{\mu x} - \mu Be^{-\mu x}$

$F'(0) = F'(\pi) = 0 \Rightarrow A = B = 0, \quad F(x) = 0$

$k = 0 :$ $F(x) = Ax + b, \quad F'(x) = A$

$F'(0) = F'(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad F_0(x) = 1 \quad (B = l)$

$k < 0, k = -p^2 :$ $F(x) = A\cos px + B\sin px, \quad F'(x) = -pA\sin px + pB\cos px$

$F'(0) = 0 \Rightarrow B = 0, \quad F'(\pi) = 0, B = 0, A \neq 0 \Rightarrow \sin p\pi = 0$

$p = n = 1, 2, 3, \ldots, \quad F_n(x) = \cos nx \quad (A = 1)$

(II) $G'' + kG = 0, k = 0$ og $k = -n^2, G(0) = 0$

$k = 0 :$ $G(y) = Ay + B, \quad , G(0) = 0 \Rightarrow B = 0, G_0(y) = A_0 y$

$k = -n^2 :$ $G(y) = A'e^{ny} + B'e^{-ny}, \quad G(0) = 0 \Rightarrow B' = -A'$

$G_n(y) = A'_n(e^{ny} - e^{-ny}) = A_n \sinh ny \quad (A_n = 2A')$

Løsningene av (i) på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ som oppfyller (ii):

$u_0(x,y) = F_0(x)G_0(y) = A_0 y$ og $u_n(x,y) = F_n(x)G_n(y) = A_n \cos nx \sinh ny$

b) For å finne en løsning av (i) som, i tillegg til (ii), også oppfyller (iii), setter vi

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx \sinh ny$$

og bestemmer $A_0, A_1, A_2, \ldots$ slik at (iii) blir oppfylt.

$1 - 2\cos 2x + \cos 4x \overset{(iii)}{=} u(x,\pi) = A_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sinh n\pi)\cos nx$

$A_0 = 1/\pi, \quad A_2 = -2/\sinh 2\pi, \quad A_4 = 1/\sinh 4\pi, \quad A_n = 0$ ellers

$u(x,y) = \frac{y}{\pi} - \frac{2}{\sinh 2\pi}\cos 2x \sinh 2y + \frac{1}{\sinh 4\pi}\cos 4x \sinh 4y$