1 **a** Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i den gitte ligningen og separerer variable:

$$F''G = FG'' - FG, \quad \frac{F''}{F} = \frac{G''}{G} - 1 = k \text{ (konstant)}, \quad \text{som gir} \begin{cases} F'' - kF = 0 \\ G'' - (k+1)G = 0 \end{cases}$$

Randbetingelsene medfører $F'(0) = F'(1) = 0$, og vi må ha $k \leq 0$ for å få løsninger $F(x) \not\equiv 0$. For $k = 0$ får vi $F_0(x) = 1$, og for $k < 0$, $k = -p^2$, får vi $p = n\pi$ og $F_n(x) = \cos n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$

Ligningen for $G(t)$ blir $G'' - G = 0$ når $k = 0$ og $G'' + (n^2\pi^2 - 1)G = 0$ når $k = -n^2\pi^2$. Det gir

$G_0(t) = A_0 e^t + B_0 e^{-t}$
$G_n(t) = A_n \cos w_n t + B_n \sin w_n t \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots$

der $w_n = \sqrt{n^2\pi^2 - 1}$ og A_n, B_n er vilkårlige konstanter. (Løsningen for $G_0(t)$ kan også skrives $G_0(t) = A_1^* \cosh t + B_1^* \sinh t$. For $u(x,t) = F(x)G(t)$ blir svaret

$u_0(x,t) = F_0(x)G(t) = A_0 e^t + B_0 e^{-t}$
$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = (A_n \cos w_n t + B_n \sin w_n t) \cos n\pi x, \quad n = 1, 2, \ldots$

b Siden den gitte ligningen er lineær og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ også en løsning, og den oppfyller randbetingelsene. Vi setter følgelig

$$u_n(x,t) = \left(A_0 e^t + B_0 e^{-t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos w_n t + B_n \sin w_n t) \cos n\pi x$$

og bestemmer koeffisientene A_n og B_n for $n = 0, 1, 2, \ldots$ slik at initialbetingelsene blir oppfylt. Leddvis derivasjon mhp. t gir

$$u_t(x,t) = \left(A_0 e^t - B_0 e^{-t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-w_n B_n \cos w_n t) \cos n\pi x.$$

Til bestemmelse av A_n og B_n får vi dermed

(i) $\quad 1 + \cos \pi x = u(x,0) = (A_0 + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\pi x$

(ii) $\quad 0 = u_t(x,0) = (A_0 - B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} w_n B_n \cos n\pi x.$

Av (i) får vi $A_0 + B_0 = 1, A_1 = 1$ og $A_n = 0$ for $n \geq 2$. Av (ii) får vi $A_0 - B_0 = 0$ og $B_n = 0$ for $n \geq 1$. Det gir $A_0 = B_0 = 1/2$ og, siden $\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh t$,

$$u(x,t) = \cosh t + \cos w_1 t \cos \pi x = \cosh t + \cos\left(\sqrt{\pi^2 - 1}t\right) \cos \pi x.$$

$\boxed{2}$ **a)** Fra Rottmann (appendiks) har vi at Fourier-sinusrekken er ($L = 1$ her)

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

der

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx.$$

Disse integralene kan vi regne ut med delvis integrasjon (eller vi kan bruke Rottmann, hvor de ubestemte integralene $\int x\sin(ax)\,dx$ og $\int x^2\sin(ax)\,dx$ står oppført [a en vilkårlig konstant]). La oss bruke delvis integrasjon direkte:

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 f(x)g'(x),\,dx && \Big(f(x) = x(1-x), \quad g'(x) = \sin(n\pi x)\Big)\\
&= 2\left[f(x)g(x)\right]\Big|_0^1 - 2\int_0^1 f'(x)g(x)\,dx && \Big(f'(x) = 1-2x, \quad g(x) = \frac{-1}{\pi n}\cos(n\pi x)\Big)\\
&= \frac{2}{\pi n}\int_0^1 (1-2x)\cos(n\pi x)\,dx\\
&= \frac{2}{\pi n}\int_0^1 u(x)v'(x),\,dx && \Big(u(x) = 1-2x, \quad v'(x) = \cos(n\pi x)\Big)\\
&= \frac{2}{\pi n}\left[u(x)v(x)\right]\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx && \Big(u'(x) = -2, \quad v(x) = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big)\\
&= -\frac{2}{\pi n}\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx\\
&= \frac{4}{(\pi n)^2}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx\\
&= \frac{4}{(\pi n)^3}\left[-\cos(n\pi x)\right]\Big|_0^1\\
&= \frac{4}{(\pi n)^3}\left[1-\cos(n\pi)\right]\\
&= \frac{4}{(\pi n)^3}\left[1-(-1)^n\right].
\end{aligned}$$

Svaret er derfor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left[1-(-1)^n\right]}{(\pi n)^3}\sin(n\pi x).$$

Alternativt: Siden

$$b_n = \begin{cases} \frac{8}{(n\pi)^3} & \text{for } n = 1, 3, \dots, \\ 0 & \text{for } n = 2, 4, \dots, \end{cases}$$

kan vi også uttrykke svaret som følger:

$$\frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\sin(x)}{1^3} + \frac{\sin(3x)}{3^3} + \frac{\sin(5x)}{5^3} + \cdots\right).$$

b) Fra punkt (a) har vi, for $0 \le x \le 1$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4[1-(-1)^n]}{(\pi n)^3}\sin(n\pi x) = \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\sin(x)}{1^3} + \frac{\sin(3x)}{3^3} + \frac{\sin(5x)}{5^3} + \cdots\right) \qquad (*)$$

At vi har likhet her, følger fra konvergenskriteriet for Fourierrekker, for Fourier-sinusrekken er rett og slett Fourierrekken til den *odde periodiske utvidelsen* av $f(x)$ med periode 2, og denne utvidelsen er kontinuerlig overalt (tegn grafen!), og har høyre- og venstrederiverte i hvert punkt. (Den er faktisk kontinuerlig deriverbar.) [Merk: Strengt tatt er det kun nødvendig å begrunne at vi har likhet i $(*)$ for den spesielle x-verdien vi skal sette inn, nemlig $x = 1/2$.]

For å få fortegnet til å alternere mellom $+$ og $-$, som i den rekken vi skal finne summen av, må vi velge en passende x i $(*)$. Vi velger $x = 1/2$, fordi

$$\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{for } n = 2, 4, \ldots,, \\ +1 & \text{for } n = 1, 5, \ldots,, \\ -1 & \text{for } n = 3, 7, \ldots,, \end{cases}$$

Vi får altså:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} = \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - + \cdots\right)$$

som gir det endelige svaret:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \cdots = \frac{\pi^3}{32}.$$

c) Siden v er uavhengig av t, er de partielle deriverte med hensyn på t, alle lik 0. Spesielt er $v_{tt} = 0$, så ligningen $v_{tt} - v_{xx} + g = 0$ forenkles til $v_{xx} = g$, dvs.

$$v''(x) = g.$$

Integrasjon gir

$$v'(x) = gx + C \implies v(x) = \frac{1}{2}gx^2 + Cx + D,$$

der C og D er konstanter. Men randbetingelsene gir

$$v(0) = v(1) = 0 \implies D = 0, \quad C = -\frac{1}{2}g$$

Svaret er derfor: $v(x) = \frac{1}{2}g(x^2 - x) = -\frac{1}{2}gx(1 - x)$. Eller med $f(x)$ som i punkt (a):

$$v(x) = -\frac{1}{2}g \cdot f(x).$$

d) Sett $w(x,t) = F(x)G(t)$. I det følgende ser vi bort fra den *trivielle løsningen* $w \equiv 0$, dvs. vi ser bort fra muligheten $F \equiv 0$, og likeledes $G \equiv 0$. Ligningen

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ w(0,t) = w(1,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

gir oss

$$F(x)G''(t) - F''(x)G(t) = 0$$

dvs.

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)}$$

og siden venstresiden kun avhenger av x, mens høyresiden kun avhenger av t, må begge sider være lik en konstant k. Dette gir oss ordinære differensialligninger for $F(x)$ og $G(t)$:

$$F''(x) = kF(x), \tag{2}$$
$$G''(t) = kG(t) \tag{3}$$

Videre gir randbetingelsene i (1) at

$$F(0) = F(1) = 0. \tag{4}$$

Vi løser først (2), (4). Vi ser separat på de tre mulighetene $k > 0$, $k = 0$ og $k < 0$.

1. $k > 0 \implies$ generell løsning $F(x) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$, der $\lambda = \sqrt{k}$. Men (4) $\implies$ $A = B = 0$, så vi kan se bort fra $k > 0$.
2. $k = 0 \implies$ generell løsning $F(x) = Ax + B$, men (4) $\implies A = B = 0$, så vi kan se bort fra $k = 0$.
3. $k < 0 \implies$ generell løsning $F(x) = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t)$, der $\lambda = \sqrt{-k}$. (4) gir:

   $$F(0) = A = 0 \implies F(1) = B\sin(\lambda) = 0 \implies \sin(\lambda) = 0 \implies \lambda = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

   og derfor:
   $$F(x) = F_n(x) = B_n \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3 \tag{5}$$

   Nå løser vi (3) med $k = -\lambda^2 = -\pi^2 n^2$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Generell løsning er

   $$G(t) = G_n(t) = C_n \cos(n\pi t) + D_n \sin(n\pi t). \tag{6}$$

   Merk at vi kan sette $B_n = 1$ i (5), siden vi har to vilkårlige konstanter i $G_n(t)$. Svaret blir derfor:

   $$w_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = [C_n \cos(n\pi t) + D_n \sin(n\pi t)]\sin(n\pi x).$$

Vi kommer nå til det siste spørsmålet. Det er klart at $u = v + w$ oppfyller ligningen og randbetingelsen i ligningen

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + g = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{7}$$

[dette er fordi ligningen er lineær, v er en partikulær løsning, og w er en homogen løsning]; hovedpoenget er å få u til å oppfylle initialbetingelsen:

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

Siden $v(x) = \frac{1}{2}g \cdot f(x)$ [der $f(x)$ er som i punkt (a)!] har vi at

$$u(x,0) = v(x) + w(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = w_t(x,0) = 0$$

dvs.

$$w(x,0) = -v(x) = \frac{1}{2}g \cdot f(x), \qquad w_t(x,0) = 0. \tag{8}$$

Den generelle løsningen på rekkeform er:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t) \ = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(n\pi t) + D_n \sin(n\pi t)] \sin(n\pi x)$$

som innsatt i (8) gir:

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) = -\frac{1}{2} g \cdot f(x),$$
$$w_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi D_n \sin(n\pi x) = 0.$$

Dette gir at $D_n = 0$ for alle n, og videre at C_n er Fourier-sinuskoeffisientene til $-\frac{1}{2}g \cdot f(x)$; fra punkt (a) ser vi derfor at

$$C_n = \frac{1}{2} g b_n = \frac{2g}{(\pi n)^3} [1 - (-1)^n]$$

Endelig svar er derfor:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2g\,[1-(-1)^n]}{(\pi n)^3} \cos(n\pi t) \sin(n\pi x).$$

$\boxed{3}$ **a)** Derivasjon under integraltegnet gir

$$\mathcal{F}\{u_t\} = \hat{u}_t$$

[mer detaljert: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-iwx}\, dx \right)$].

Videre: Fra den generelle 'derivasjonsregelen' $\mathcal{F}\{f'(x)\} = iw\mathcal{F}\{f(x)\}$ (Rottmann) har vi (merk at $2t$ her behandles som en konstant)

$$\mathcal{F}\{2tu_{xx}\} = 2t\mathcal{F}\{u_{xx}\} = 2t(iw)^2 \hat{u} = -2tw^2\hat{u}.$$

Konklusjonen er at (vi tar Fouriertransformert av begge sider av ligningen):

$$\mathcal{F}\{u_t - 2tu_{xx}\} = \hat{u}_t + 2tw^2\hat{u} = 0,$$

som er den søkte ordinære differensialligningen. Når vi skal løse denne, kan vi holde variabelen w konstant. [Med andre ord: Vi ser på ligningen $y' + 2tw^2 y = 0$ for w konstant! Hvis man ikke ser løsningen direkte, kan man separere de variable y og t: $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -2w^2 t$, og integrere mhp. t.]

Den generelle løsningen er $\hat{u} = Ae^{-w^2t^2}$ hvor A er en konstant. Men siden w ble hold midlertidig fast, og nå 'slippes løs' igjen, må vi la $A = A(w)$ avhenge av w, for å få den mest generelle løsningen. Altså er svaret:

$$\hat{u}(w,t) = A(w) e^{-w^2t^2}.$$

b) Initialbetingelsen sier at $\hat{u}(w,0) = \hat{f}(w)$. Følgelig er $A(w) = \hat{f}(w)$, og

$$\hat{u}(w,t) = \hat{f}(w) e^{-w^2t^2}. \qquad (*)$$

Integralet i oppfaven gjenkjenner vi som et konvolusjonsprodukt (mhp. x). Ved å ta den Fouriertransformerte av begge sider har vi:

$$\hat{u}(w,t) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(w)\hat{g}(w,t) \tag{$**$}$$

Sammenligner vi $(*)$ og $(**)$, ser vi at

$$\hat{g}(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2t^2}.$$

Vi bruker nå den oppgitte informasjonen

$$\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}.$$

For å få samme eksponential må vi velge a slik at $\frac{1}{4a} = t^2$, dvs. $a = \frac{1}{4t^2}$. Da har vi:

$$\mathcal{F}\{e^{-x^2/(4t^2)}\} = \sqrt{2}te^{-w^2t^2}$$

$$\implies \mathcal{F}\{\frac{1}{\sqrt{2}t} e^{-x^2/(4t^2)}\} = e^{-w^2t^2} \implies \mathcal{F}\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}t} e^{-x^2/(4t^2)}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2t^2}.$$

Konklusjonen er at

$$g(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t} e^{-x^2/(4t^2)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t} \exp\left(-\frac{x^2}{4t^2}\right).$$

$\boxed{4}$ La $W(x,s)$ være den Laplacetransformerte av $w(x,t)$, $W(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}w(x,t)\,dt$. Laplacetransformasjon av den gitte ligningen gir

$$\frac{\partial W}{\partial x} + sW - w(x,0) = \frac{1}{s^2}, \qquad \text{dvs.} \qquad \frac{\partial W}{\partial x} + sW = \frac{1}{s^2} \qquad (\text{siden } w(x,0) = 0).$$

Dette er en ordinær differensialligning for $W(x,s)$ betraktet som funksjon av x. Ligningen kan da skrives $dW/dx + sW = 1/s^2$, og ved å bruke løsningen som står i oppgaven får vi

$$W(x,s) = C(s)e^{-sx} + 1/s^3.$$

Vi skal ha $w(0,t) = 0$ og følgelig $W(0,s) = 0$. Siden $W(0,s) = C(s) + 1/s^3$ følger $C(s) = -1/s^3$ og

$$W(x,s) = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^3}e^{-xs}.$$

For å inverstransformere, bruker vi at $F(s) = 1/s^3$ har inverstransformert $f(t) = \frac{1}{2}t^2$ og skiftteorem 2:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}(t-x)^2u(t-x) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{for } 0 \le t \le x \\ \frac{1}{2}x(2t-x) & \text{for } t \ge x. \end{cases}$$