## Fra Kreyszig, avsnitt 17.1

**3** Vi skal undersøke hvordan små differanser av store tall kan bli påvirket av avrundingsfeil:

$$\begin{aligned}
5S: &\quad \frac{0,81534}{35,724-35,596} = \frac{0,81534}{0,12800} = 6,3698 \\
4S: &\quad \frac{0,8153}{35,72-35,60} = \frac{0,8153}{0,1200} = 6,794 \\
3S: &\quad \frac{0,815}{35,7-35,6} = \frac{0,815}{0,1} = 8,15 \\
2S: &\quad \frac{0,82}{36-36} = \infty
\end{aligned}$$

**5** Vi skal skrive brøken $\frac{a}{b-c} = \frac{0,81534}{35,724-35,596}$ i oppgave 17.1.3 som $\frac{a(b+c)}{b^2-c^2} = \frac{58,150}{9,1290}$, og gjenta fremgangsmåten i denne oppgaven:

$$\begin{aligned}
5S: &\quad \frac{58,150}{9,1290} = 6,3698 \\
4S: &\quad \frac{58,15}{9,129} = 6,370 \\
3S: &\quad \frac{58,2}{9,13} = 6,37 \\
2S: &\quad \frac{58}{9,1} = 6,4
\end{aligned}$$

## Fra Kreyszig, avsnitt 17.2

**9** Skal løse $x^4 - x - 0.12 = 0$ ved fikspunktsiterasjon når man starter i $x_0 = 1$. Fikspunktiterasjon er gitt ved

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

når vi har en ligning $x = g(x)$. Vi setter $x = g(x) = (x + 0.12)^{\frac{1}{4}}$ og får

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1.02874 \\
x_2 &= 1.03527 \\
x_3 &= 1.03674 \\
x_4 &= 1.03707 \\
x_5 &= 1.03715 \\
x_6 &= 1.03716.
\end{aligned}$$

**17** Skal finne løsningen til likningen $\cos x \cosh x = 1$. $x$ skal være i nærheten av $x = \frac{3}{2}\pi$ Finner først $f(x)$

$$f(x) = \cos x \cosh x - 1 = 0$$

Finner så $f'(x)$

$$f'(x) = -\sin x \cosh x + \cos x \sinh x$$

Velger $x(0) = 4.5$ som startverdi.

| i | $x_i$ | i | $x_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4.80388 | 3 | 4.73006 |
| 2 | 4.73492 | 4 | 4.73004 |

$\boxed{19}$ Skal finne løsningen på likningen $f(x) = 0$.

$$f(x) = 1 - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{64}x^4 - \tfrac{1}{2304}x^6$$

Finner så $f'(x)$

$$f'(x) = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{1}{384}x^5$$

Bruker så følgende formel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Velger $x = 2$ som startverdi

| i | $x_i$ |
|---|---|
| 1 | 2.38095 |
| 2 | 2.39163 |
| 3 | 2.39165 |

## Fra Kreyszig, avsnitt 17.3

$\boxed{3}$ Finn $e^{-0.25}$ og $e^{-0.75}$ ved lineær interpolasjon (Lagrangeinterpolasjon av grad 1) med henholdsvis $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ og $x_0 = 0.5$, $x_1 = 1$. Vi setter $f(x) = e^{-x}$,

$$p_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

og får for $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 0.5}{0 - 0.5} = 1 - 2x$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 0}{0.5 - 0} = 2x$$

$$p_1(x) = (1 - 2x) + 2xe^{-0.5}$$

$$p_1(0.25) = 0.8033.$$

For $x_0 = 0.5$, $x_1 = 1$ får vi:

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-1}{0.5-1} = 2 - 2x \\
L_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-0.5}{1-0.5} = 2x - 1 \\
p_1(x) &= (2-2x)e^{-0.5} + (2x-1)e^{-1} \\
p_1(0.75) &= 0.4872.
\end{aligned}
$$

Så skal vi finne det samme med kvadratisk interpolasjon (Lagrangeinterpolasjon av grad 2) og $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$.

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_2 - x_0} = (2x-1)(x-1) \\
L_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = -4x(x-1) \\
L_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_0 - x_2}\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = x(2x-1) \\
p_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\
p_2(0.25) &= 0.7839 \\
p_2(0.75) &= 0.4679.
\end{aligned}
$$

De korrekte verdiene (utregnet på kalkulator) er:

$$
\begin{aligned}
f(0.25) &= 0.7788 \\
f(0.75) &= 0.4724.
\end{aligned}
$$

Feilen ved lineær interpolasjon blir

$$
\begin{aligned}
|e_l(0.25)| &= |0.7788 - 0.8033| = 0.0245 \\
|e_l(0.75)| &= |0.4724 - 0.4872| = 0.0148.
\end{aligned}
$$

Feilen ved kvadratisk interpolasjon blir

$$
\begin{aligned}
|e_k(0.25)| &= |0.7788 - 0.7839| = 0.0051 \\
|e_k(0.75)| &= |0.4724 - 0.4679| = 0.0045.
\end{aligned}
$$

Vi ser (selvfølgelig) at feilen blir mindre når vi øker graden av Lagrangeinterpolasjon.

## Eksamensoppgaver

4 Newtons metode på $x^m - R = f(x) = 0$ blir

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^m - R}{mx^{m-1}} = x - \frac{x}{m} + \frac{R}{mx^{m-1}}$$

Vi skriver da iterasjonen som

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{m} + \frac{R}{mx_n^{m-1}}$$

At formelen er riktig ser vi ved å putte inn løsningen $\sqrt[m]{R} = R^{1/m}$ og ser at $x_{n+1} = x_n$ da. Innsetting av fikspunktet $R^{1/m}$ i ligning (2) gir:

$$g(R^{1/m}) = 1 - \frac{R}{(R^{1/m})^m} + \frac{R}{(R^{1/m})^{m-1}} = 1 - 1 + R \cdot R^{\frac{1}{m}-1} = R^{1/m}$$

og dermed er løsningen et fikspunkt for $g(x)$ også.

**b**

Iterasjoner med $m = 2$, $R = 7/2$ og $x_0 = 2$:

| Iterasjon | Newton | $g(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.875000 | 1.875000 |
| 2 | 1.870833 | 1.871111 |
| 3 | 1.870829 | 1.870848 |
| 4 | 1.870829 | 1.870830 |
| 5 | | 1.870829 |
| 6 | | 1.870829 |

5

$$J = \begin{bmatrix} 2x + y^3 & 3y^2x \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

For $k = 0, 1, 2$ løs

$$\begin{bmatrix} 2x^{(k)} + (y^{(k)})^3 & 3(y^{(k)})^2x^{(k)} \\ 6x^{(k)}y^{(k)} & 3(x^{(k)})^2 - 3(y^{(k)})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta y^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (x^{(k)})^2 + x^{(k)}(y^{(k)})^3 - 9 \\ 3(x^{(k)})^2y^{(k)} - (y^{(k)})^3 - 4 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \\ y^{(k+1)} &= y^{(k)} + \Delta y^{(k)} \end{aligned} \tag{3}$$

- Først iterasjon

$$\begin{bmatrix} 18.025 & 22.5 \\ 18.00 & -14.43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^{(0)} \\ \Delta y^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 11.19 \\ -8.825 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

  og $\Delta x^{(0)} = 0.05577$, $x^{(1)} = 1.25577$, $\Delta y^{(0)} = -0.542009$, $y^{(1)} = 1.95799$.

- Andre iterasjon

$$\begin{bmatrix} 10.018 & 14.444 \\ 14.753 & -6.7700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^{(1)} \\ \Delta y^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2.004 \\ -2.2431 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

  og $\Delta x^{(1)} = 0.067$, $x^{(2)} = 1.3228$, $\Delta y^{(1)} = -0.185$, $y^{(2)} = 1.7728$.