NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4130 Matematikk 4N
høsten 2005

**Løsningsforslag - Øving 10**

**1** Vi bruker Newtons dividerte differensers metode:

| $x_i$ | $f[x_i]=y_i$ | $f[x_i,x_{i+1}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | |
| | | $\frac{1-2}{1.5-1}=-2$ | | |
| 1.5 | 1 | | $\frac{-1+2}{2-1}=1$ | |
| | | $\frac{0.5-1}{2-1.5}=-1$ | | $\frac{1/3-1}{3-1}=-\frac{1}{3}$ |
| 2 | 0.5 | | $\frac{-0.5+1}{3-1.5}=\frac{1}{3}$ | |
| | | $\frac{0-0.5}{3-2}=-0.5$ | | |
| 3 | 0 | | | |

Interpolasjonspolynomet i Newtons form er

$$p_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}),$$

og i tilfellet vårt

$$p_3(x)=2-2(x-1)+(x-1)(x-1.5)-1/3(x-1)(x-1.5)(x-2),$$

$$p_3(x)=-0.3333x^3+2.5x^2-6.6667x+6.5.$$

**2** Interpolasjonspunktene blir

| $x_i$ | 0.2 | 0.25 | 0.3 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | -0.221403 | -0.0340254 | 0.150141 |

der

$$y_i=5x_ie^{x_i}$$

Interpolasjonspolynomet $p_2(y)$ på Lagrange form er

$$P_2(y) = x_0\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}+x_1\frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y)(y_1-y_2)}+x_2\frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_0)}$$

Setter vi inn verdiene for $(x_i,y_1)_{i=0}^2$ og regner ut verdien av polynomet i $y=0$, får vi

$$\begin{aligned}P_2(0) &= 0.2\frac{(0-(-0.0340254))(0-0.150141)}{(-0.221403-(0-0.0340254))(-0.221403-0.150141)}\\ &+ 0.25\frac{((0-(-0.221403))(0-0.150141)}{(-0.0340254-(-0.221403))(-0.0340254-0.150141)}\\ &+ 0.3\frac{(0-(-0.221403))(0-(-0.0340254))}{(0.150141-(-0.221403))(0.150141-(-0,0340254))}\\ &= 0.259174\end{aligned}$$

Hvordan virker invers interpolsajon?

Vi antar at sammenhengen $y = f(x)$ også kan skrives som $x = g(y)$. I så fall vil løsningne av $f(x) = 0$ være $g(0)$. Interpolasjonspolynomet $P_2(y) \approx g(y)$ og $P_2(0) \approx g(0)$.

## Fra Kreyszig, avsnitt 17.5

$\boxed{3}$ Vi ønsker å approksimere verdien av integralet $\int_0^1 x^2dx$, ved hjelp av trapesmetoden (formel (2), s. 870 i Kreyszig). Vi setter her $f(x) = x^2$. Med $h = 1.0$ får vi:

$$\int_0^1 x^2dx \approx h(\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1)) = 1.0(\frac{1}{2}0^2 + \frac{1}{2}1^2) = 0.5$$

Med $h = 0.5$ får vi:

$$\int_0^1 x^2dx \approx h(\frac{1}{2}f(0) + f(0.5) + \frac{1}{2}f(1)) = 0.375$$

Og med $h = 0.25$:

$$\int_0^1 x^2dx \approx h(\frac{1}{2}f(0) + f(0.25) + f(0.5) + f(0.75) + \frac{1}{2}f(1)) = 0.34375$$

Eksakt har vi: $\int_0^1 x^2dx = 1/3$, så vi ser at vi får brukbar tilnærming med $h = 0.25$.

$\boxed{14}$ Beregner $J_{1.0}$ og $J_{0.5}$

$$\begin{aligned} h = 1: \quad & J_{1.0} &&= \tfrac{1}{3}(e^0 + 4e^{-1} + e^{-2}) = 0.868951 \\ h = 0.5: \quad & J_{0.5} &&= \tfrac{0.5}{3}(e^0 + 4e^{-0.5} + 2e^{-1.0} + 4e^{-1.5} + e^{-2.0} \\ & &&= 0.864957 \end{aligned}$$

Feilgrenser: Feilen

$$\epsilon_s = \int_0^2 e^{-x}dx = -\frac{2-0}{180}h^4e^{-\hat{t}}, \qquad \hat{t} \in (0,2)$$

Siden den 4.deriverte av $e^{-x} = e^{-x}$ Det betyr at $e^{-x}$ liger mellom $e^0$ og $e^{-2}$, og når $h = 0.5$ får vi

$$\tfrac{2}{180}0.5^4e^{-2} < |\epsilon_s| < \tfrac{2}{180}0.5^4$$

eller

$$9.4 \cdot 10^{-5} < |\epsilon_s| < 6.94 \cdot 10^{-4}$$

Feilestimatet

$$|\epsilon_{0.5}| \approx \tfrac{1}{15}|J_{0.5} - J_{1.0}| = 2.66 \cdot 10^{-4}$$

Til sammenligning er feilen $\epsilon_s = |(1 - e^{-2})^2 - J_{0.5}| = 2.92 \cdot 10^{-4}$

**5** **a)** Vi skal finne en approksimasjon til itegralet

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\pi. \tag{1}$$

Integrasjonspolynomet på Lagrangeform for $f(x)$ med nodene $x_0, x_1, x_2$ er:

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \cdot f(x_2)$$

og dermed for datasettet

| $x_i$ | -0.8660 | 0 | 0.8660 |
|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 0.5714 | 1 | 0.5714 |

har vi:

$$p_2(x) = -0.5715x^2 + 1.$$

Newtons endelige differenstabell er:

| | | | |
|---|---|---|---|
| -0.8660 | 0.5714 | 0.4949 | -0.5715 |
| 0 | 1 | -0.4949 | |
| 0.8660 | 0.5714 | | |

og polynomet på Newtonform er:

$$p_2(x) = 0.5714 + (x+0.8660)0.4949 + (x+0.8660)x(-0.5715) = -0.5715x^2 + 1.$$

Ved å beregne integralet av $p_2(x)$ eksakt får vi

$$J = \int_{-1}^{1} p_2(x)dx = 1.6190,$$

og feilen er $|\pi/2 - I| = 0.0482$.

**b)** Ved å bruke Simpsons metode med nodene $-1$, 0, 1 får vi

$$S_2 = \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{3} \approx 1.6667,$$

og feilen er $|\pi/2 - S_2| \approx 0.0959$.

Selv om vi bruker det samme antallet noder som i a), får vi en større feil. Grunnen er at Simpsons metode bruker ekvidistante noder. Det finnes distribusjoner av noder i integrasjon intervallet som fører til bedre approksimasjoner til integralet enn ved bruk av ekvidistante noder.

Feilformelen for den sammensatte Simpsonregelen for integralet

$$\int_a^b f(x)dx,$$

for $n = 2m$ intervaller med $h = \frac{b-a}{2m}$, er

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx - S_{2m} = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a,b).$$

For generell $h$ (og $m$) får vi følgende skranke

$$\left| -\frac{(1-(-1))}{180}h^4 f^{(4)}(\eta) \right| \le \frac{1}{90}h^4 25.$$

Dersom vi setter

$$\frac{25}{90}h^4 \leq 0.05,$$

finner vi at $h \leq 0.6514$, og følgelig $m = 2$.