Løsningsforslag - Øving 11

Fra Kreyszig, avsnitt 18.1

5 Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 1.5x_1 + 2.3x_2 &= 16 \\ -4.5x_1 - 6.9x_2 &= 48 \end{aligned}$$

ved Gausseliminasjon. I dette tilfellet må vi pivotere (bytte om ligningene) siden koeffisienten foran x_1 i den andre ligningen har en større absoluttverdi enn den tilsvarende koeffisienten i den første ligningen. Vi setter i stedet

$$\begin{aligned} -4.5x_1 - 6.9x_2 &= 48 \\ 1.5x_1 + 2.3x_2 &= 16. \end{aligned}$$

Deretter ganger vi den øverste ligningen med $\frac{1.5}{-4.5} = -\frac{1}{3}$ og trekker fra den nederste. Vi får:

$$\begin{aligned} -4.5x_1 - 6.9x_2 &= 48 \\ 0x_2 &= 32. \end{aligned}$$

Siden det ikke eksisterer løsninger for den andre ligningen, eksisterer det heller ingen løsninger for ligningssystemet.

11 Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 25 \\ -5x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= -4 \\ x_1 + 22x_2 + 23x_3 &= 71 \end{aligned}$$

ved Gausseliminasjon. I dette tilfelle pivoterer vi siden koeffisienten foran x_1 i den andre ligningen har den største absoluttverdien i forhold til de tilsvarende koeffisientene i de andre ligningene. Vi setter i stedet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 7 & 25 \\ 1 & 22 & 23 & 71 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 7.8 & 7.8 & 23.4 \\ 0 & 23.4 & 23.4 & 70.2 \end{array}\right].$$

Den tredje ligningen har nå høyere koeffisient foran x_2-leddet, så vi bytter dem om:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 23.4 & 23.4 & 70.2 \\ 0 & 7.8 & 7.8 & 23.4 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 23.4 & 23.4 & 70.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Siden vi bare har to lineært uavhengige ligninger og tre variable, betyr det at vi vil få uendelig mange løsninger; en løsning som avhenger av en reell variabel a. Vi setter $x_3 = a$, og tilbakesubstituerer. Vi får:

$$x_2 = 3 - a$$
$$x_1 = 5 - a.$$

Tilsammen blir dette:

$$x_1 = 5 - a$$
$$x_2 = 3 - a$$
$$x_3 = a,$$

når a er en reell variabel.

2 **a)** Koeffisientmatrisa

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

er ikke strengt diagonal dominant, siden

$$1 < 9 + 2$$

dvs. ulikhetene $|a_{ii}| > \sum_{j=1,i\neq j}^{n} |a_{ij}|$ er ikke oppfylt for $i = 1$.
(For diagonaldominans må ulikeheten være oppfylt for **alle** radene.)

Vi kan bytte om på rekkefølgen av ligningene:

$$6x_1 + x_2 + x_3 = 107$$
$$x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 36$$
$$2x_1 - x_2 + 8x_3 = 121$$

Dette systemet er strengt diagonaldominant, siden
$6 > 1 + 1 \qquad 9 > 1 + 2 \qquad 8 > 1 + 3$

b) Jacobi-iterasjoner:

La $\vec{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$ Da er

$$x_1^{(1)} = \tfrac{1}{6}(107 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \tfrac{1}{6}(107 - 1 - 1) = 17.5$$
$$x_2^{(1)} = \tfrac{1}{9}(36 - x_1^{(0)} + 2x_3^{(0)}) = \tfrac{1}{9}(36 - 1 + 2) = 4.1111$$
$$x_3^{(1)} = \tfrac{1}{8}(121 - 2x_1^{(0)} + x_2^{(0)}) = \tfrac{1}{8}(121 - 2 + 1) = 15$$

og

$$x_1^{(2)} = \tfrac{1}{6}(107 - x_2^{(1)} - x_3^{(1)} = 14.6481$$
$$x_2^{(2)} = \tfrac{1}{9}(36 - x_1^{(1)} + 2x_3^{(1)} = 5.3889$$
$$x_3^{(3)} = \tfrac{1}{8}(121 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} = 11.2639$$

c Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{(0)} &= [1,1,1]^T \quad \text{Da er} \\
x_1^{(1)} &= \tfrac{1}{6}(107 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = 17.5 \\
x_2^{(1)} &= \tfrac{1}{9}(36 - x_1^{(1)} + 2x_3^{(0)}) = 2.2778 \\
x_3^{(1)} &= \tfrac{1}{8}(121 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)}) = 11.0347
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \tfrac{1}{6}(107 - x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = 15.6146 \\
x_2^{(2)} &= \tfrac{1}{9}(36 - x_1^{(2)} + 2x_3^{(1)}) = 4.7172 \\
x_3^{(2)} &= \tfrac{1}{8}(121 - 2x_1^{(2)} + x_2^{(2)}) = 11.8110
\end{aligned}$$

Ytterligere iterasjoner (som ikke er en del av oppgaven) gir følgende resultater:

Jacobi:	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
	0	1.0000	1.0000	1.0000
	1	17.5000	4.1111	15.0000
	2	14.6481	5.3889	11.2639
	3	15.0579	4.8755	12.1366
	4	14.9980	5.0239	11.9700
	.			
	.			
	.			
	8	15.0001	5.0000	11.9999
	9	15.0000	5.0000	12.0000

Gauss-seidel:	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
	0	1.0000	1.0000	1.0000
	1	17.5000	2.2778	11.0347
	2	15.6146	4.7172	11.8110
	3	15.0786	4.9493	11.9740
	4	15.0128	4.9928	11.9959
	5	15.0019	4.9989	11.9994
	6	15.0003	4.9998	11.9999
	7	15.0000	5.0000	12.0000

3 **a)** Vi bruker iterasjonen $M\mathbf{x}^{(n+1)} = N\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b}$ hvor $M - N = A$ og M er den nedre triangulær delen til A. Vi får

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(n)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Med $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ får vi

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.75 \\ 1.75 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.8750 \\ -0.0625 \\ 1.0625 \end{bmatrix}.$$

b) Hvis vi bytter om rad 2 og 3 i matrisen (noe vi har lov til), kan vi løse systemet med Gauss-Seidel på vanlig måte. Hvis vi sier at vi ikke har lov til å bytte rader (hvis f.eks dataprogrammet vårt ikke tillater det), er

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ikke løsbart med Gauss-Seidel metoden fordi den nedre triangulære delen til A ikke er invertbar. Vi trenger å invertere M for å komme fra $Mx^{(n+1)} = Nx^{(n)} + b$ til $x^{(n+1)} = M^{-1}(Nx^{(n)} + b)$ der $x^{(n+1)}$ er løst ut. Hvis vi for exempel tar

$$M := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

har vi $A = M - N$ og M invertbar, vi kan løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved å bruke iterasjonen $\mathbf{x}^{(n+1)} = M^{-1}(N\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b})$, og hvis $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ blir

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.75 \\ 1.75 \end{bmatrix}.$$

Fra Kreyszig, avsnitt 19.1

$\boxed{6}$ Vi skal finne en tilnærmet verdi for $y(x = 1)$ gitt ved

$$y' = y - y^2, \qquad y(0) = 0,5, \qquad h = 0,1$$

ved å bruke forbedret Eulers metode. Velger $x_0 = 0$ og $y_0 = 0,5$. Algoritmen (side 945-946 i Kreyszig) går:

$$\begin{aligned} y^*_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}h(f(x_{n+1}, y_{n+1})). \end{aligned}$$

der $f(x, y) = y'$. Vi merker oss at her er f ikke eksplisitt avhengig av x_n. Første iterasjon blir

$$\begin{aligned} y_1^* &= y_0 + h(y_0 - y_0^2) = 0,525 \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}h\left(y_0 - y_0^2 + y_1^* - {y_1^*}^2\right) \end{aligned}$$

Vi lager oss et enkelt Matlab-script som regner ut alle de ti iterasjonene for oss:

```
y =zeros(1,11);     % Lager en tom 1x11-vektor y. Teller
                   % fra 1 til 11, ikke 0 til 10, da Matlab
                   % ikke tar index 0.
y_=zeros(1,11);     % Lager en tom 1x11-vektor y*. Kan ikke
                   % bruke *, da dette betyr multiplikasjon.
y(1) = .5;          % Setter verdier for y(0) og h. N er
h=.1;               % antall skritt. For 10 iterasjoner må
N=11;               % vi bruke N=11.
.
for(i=1 : N-1)
   y_(i+1) = y(i) + h*(y(1)-y(i)^2);
   y(i+1) = y(i) + .5*h*(y(1)-y(i)^2 + y_(i+1) - y_(i+1)^2);
end
```

med resultatet $y(x = 1) \approx y_{10} = 0,6886$. Vi løser nå ligningen eksakt:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= y - y^2 \\ \int \frac{dy}{y - y^2} = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y-1} &= \int dx \\ \ln y - \ln(y-1) = \ln\left(\frac{y}{y-1}\right) &= x + C' \\ \frac{y}{y-1} &= Ce^x \\ y &= \frac{-Ce^x}{1 - Ce^x}, \end{aligned}$$

der vi har brukt delbrøkoppspalting for å løse det ene integralet. Med $y(x = 0) = 0,5$ bestemmer vi konstanten

$$0,5 = -\frac{C}{1-C} \Longrightarrow C = -1,$$

og eksakt løsning av ligningen blir

$$y(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Innsatt finner vi at $y(x = 1) = 0,73106$ og feilen blir $0,425$ eller $5,8\%$.