Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4130 Matematikk 4N Høst 2005

Øving 6

1 (Eksamen SIF5013 mai 2003, oppgave 3)

Vis at den Fouriertransformerte $\widehat{f}(w) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx$ av funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x < 0, \end{cases} \qquad \text{er} \qquad \widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)}.$$

Bruk konvolusjonsregelen til å finne den inverse Fouriertransformerte av funksjonen

$$\widehat{h}(w) = \frac{1}{(1+iw)^2} \qquad \text{(Fasit: } \sqrt{2\pi}\,xe^{-x} \text{ for } x > 0\text{, ellers 0.)}$$

2 (Eksamen SIF5013 mai 2000, oppgave 3b)

Det oppgis at den Fouriertransformerte $\widehat{f}(w) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx$ av funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \qquad \text{er} \qquad \widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos(\pi w/2)}{1-w^2}.$$

Bruk den inverse Fouriertransformasjonen til å finne verdien av integralene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi w/2)}{1-w^2}\,dw \qquad \text{og} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi w/2)}{1-w^2}\,dw \qquad \text{(Fasit: } \pi \text{ og } 0.)$$

3 (Eksamen SIF5013 mai 2001, oppgave 3)

En odde 2π-periodisk funksjon $f(x)$ er for $0 \le x \le \pi$ gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{for } 0 \le x \le \pi/2, \\ 0 & \text{for } \pi/2 < x \le \pi. \end{cases}$$

Det blir oppgitt at for $n \ne 2$ er Fouriersinuskoeffisienten b_n til $f(x)$ gitt ved

$$b_n = -\frac{4\sin(n\pi/2)}{\pi(n-2)(n+2)}, \qquad n \ne 2.$$

a) Skisser grafen til $f(x)$ på intervallet $-2\pi \le x \le 2\pi$.
Beregn koeffisienten b_2 og skriv opp Fourierrekken til $f(x)$. (Fasit: $b_2 = 1/2$, Fourierrekken er $\frac{4}{3\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{4}{1\cdot 5\pi}\sin 3x - \frac{4}{3\cdot 7\pi}\sin 5x + \frac{4}{5\cdot 9\pi}\sin 7x - + \cdots = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)}\sin(2m+1)x$.)

b) Bruk Fourierrekken til $f(x)$ til å finne summen av rekkene

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)(2m+3)} \qquad \text{og} \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2(2m+3)^2} \qquad \text{(Fasit: 0 og } \pi^2/64.)$$