Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4130 Matematikk 4N Høst 2005

Øving 12

1 La $x(t)$ være en funksjon som tilfredsstiller den ordinære differensialligningen

$$x'' = \cos(x) \tag{1}$$

med tilhørende initialbetingelser $x(0) = 0, x'(0) = 1$.

a) Innfør passende nye variable og skriv ligningen 1 om til et system av førsteordens differensialligninger.

b) Bruk steglengde $h = 0.1$ og finn en approksimasjon til $x(0.2)$ ved å ta to steg med Heuns metode (2. ordens Runge-Kutta metode).

2 Bruk både Eulers metode med steglende $h = 0.1$ og Heuns metode med steglengde $h = 0.2$ til å finne en tilnærmelse i punktet $t = 0.2$ til løsningen av systemet

$$\begin{aligned} x' &= x - 4y \\ y' &= -x + y \end{aligned}$$

med initialbetingelser $x(0) = 1, y(0) = 0$. Sammenlign med den eksakte løsningen

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{3t}\big) \\ y(t) &= \tfrac{1}{4}\big(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{3t}\big). \end{aligned}$$

3 Gitt Laplace-ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

på området $R = [0, 1] \times [0, 1]$ med randbetingelser

$$\begin{aligned} &u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad u(x, 1) = e^{\pi} \sin(\pi x), \quad \text{for } 0 \le x \le 1 \\ &u(0, y) = 0, \qquad\qquad u(1, y) = 0, \qquad\qquad\quad \text{for } 0 \le y \le 1. \end{aligned}$$

a) Finn den eksakte løsningen til problemet ved separasjon av variable.

b) Sett opp et numerisk skjema basert på sentral differens. Bruk uniformt gitter med steglengde $h = 1/N$ i både x- og y-retningen. Dette gir $N+1$ gitterpunkter i begge uavhengige variable.

c) La $N = 2$. Da blir det bare én ukjent, $u_{1,1}$. Beregn $u_{1,1}$.
La nå $N = 4$. Da blir det ni ukjente. Sett opp det lineære ligningssystemet. Bruk den eksakte løsningen som startverdi og utfør to iterasjoner med Gauss-Seidels metode for lineære ligningssystemer.
Sammenlign de numeriske løsningene med den eksakte løsningen i punktet $(x, y) = (1/2, 1/2)$ for både $N = 2$ og $N = 4$.

$\boxed{4}$ Betrakt den én-dimensjonale varmeledningsligningen

$$u_t = u_{xx}$$

på området $0 \leq x \leq 1, t \geq 0$ med startbetingelse

$$u(x,0) = x(2-x), \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1$$

og randbetingelser

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 1, \quad \text{for } t \geq 0.$$

a) Anvend den eksplisitte metoden på dette problemet. Ta to skritt med $h = 0.25$ og $k = 0.1$.

b) Anvend Crank-Nicolson på på samme problemet. Ta to skritt med samme h og k som i punkt **a)**.

c) Sett opp en eksplisitt metode, med generelt valg av k og h, for ligningen

$$u_t = u_{xx} + xu_x.$$

Bruk samme start- og randbetingelser som i sted.