**1** Oppgave 11.1.3 i Kreyszig.

**2** Oppgave 11.3.17 i Kreyszig.

**3** (Eksamen SIF5013 august 2000, oppgave 4)
Gitt den partielle differensialligningen

$$(*) \qquad u_{xx} = u_{tt} - 4u, \qquad 0 \le x \le \pi, \quad t > 0.$$

**a)** Finn alle løsninger av $(*)$ på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller randbetingelsene

$$(1) \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0.$$

**b)** Finn en løsning av $(*)$ som tilfredsstiller (1) og initialbetingelsene

$$(2) \qquad u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x), \qquad 0 \le x \le \pi.$$

(Fasit: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh(\sqrt{3}t) \sin x + t \sin(2x) + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(\sqrt{5}\, t) \sin(3x)$. )

**4** (Eksamen SIF5016 desember 2000, oppgave 2)

**a)** Finn en (formell) løsning av rand- og initialverdiproblemet

$$\text{(i)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{(1-dimensjonal varmeligning)}$$

$$\text{(ii)} \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad \text{for} \quad t \ge 0$$

$$\text{(iii)} \qquad u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{for} \quad 0 < x < \pi/2, \\ \pi - x & \text{for} \quad \pi/2 < x < \pi, \end{cases}$$

når det oppgis som kjent fra læreboka at alle funksjoner av formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller (i) og (ii) er gitt ved

$$u_n(x,t) = B_n e^{-n^2 c^2 t} \sin nx, \qquad B_n \text{ konstant}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

**b)** Finn alle løsninger av (i) på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller randbetingelsene

$$\text{(iv)} \qquad u(0,t) = 0 \qquad \text{og} \qquad u_x(\pi,t) = 0, \qquad \text{for} \qquad t \ge 0.$$

$\boxed{5}$ (Eksamen SIF5013 mai 2001, oppgave 4)
Gitt randverdiproblemet

(i) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(ii) $$u_x(0, y) = 0, \qquad u_x(\pi, y) = 0, \qquad u(x, 0) = 0.$$

**a)** Vis at alle løsninger av (i) som er av formen $u(x,t) = F(x)G(y)$ og som oppfyller (ii) er gitt ved

$$u_0(x, y) = A_0 y \qquad \text{og} \qquad u_n(x, y) = A_n \cos nx \sinh ny$$

der $n = 1, 2, 3, \ldots$ og $A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots$ er vilkårlige konstanter.

**b)** Finn en løsning av (i) som oppfyller randbetingelsene (ii) og

(iii) $$u(x, \pi) = 1 - 2\cos 2x + \cos 4x.$$