Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4130
Matematikk 4N
Høst 2005

Øving 8

1 I området $t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ er det gitt et randverdiproblem

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{tt} - u && (1)\\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0. && (2) \end{aligned}$$

a) Bestem alle funksjoner av typen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller (1) og (2).

b) Skriv opp en løsning av (1) og (2) på rekkeform, og bestem den løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 1 + \cos \pi x, && 0 \leq x \leq 1,\\ u_t(x,0) &= 0, && 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

(Fasit: $u(x,t) = \cosh t + \cos(\sqrt{\pi^2 - 1}\, t) \cos \pi x.$)

2 **a)** La $f(x) = x(1-x)$ for $0 \leq x \leq 1$. Finn Fourier-sinusrekken til $f(x)$.

b) Bestem summen av rekken $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \cdots$
(Fasit: $\frac{\pi^3}{32}$)

I resten av oppgaven skal vi se på rand- og initialverdiproblemet

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + g = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0,\\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0,\\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

der g er en gitt konstant. (Problemet modellerer en svingende, horisontal streng påvirket av tyngdekraften.)

c) Finn funksjonen $v(x)$ (uavhengig av tiden t) som tilfredsstiller randproblemet

$$(2) \qquad \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} + g = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0,\\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

d) Finn alle løsninger på formen $w(x,t) = F(x)G(t)$ av randproblemet

$$(3) \qquad \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0,\\ w(0,t) = w(1,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Bestem videere en løsning av (3), gitt på rekkeform, slik at $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ løser det opprinnelige problemet (1).
(Fasit: $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2g\,[1-(-1)^n]}{(\pi n)^3} \cos(n\pi t)\sin(n\pi x)$.)

3 Vi ser på den partielle differensialligningen

$$u_t - 2tu_{xx} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

med randbetingelsene $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = \lim_{x\to\pm\infty} u_x(x,t) = 0$ for $t \geq 0$.

a) Finn en ordinær differensialligning tilfredsstilt av den Fouriertransformerte $\hat{u}(w,t) = \mathcal{F}\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-iwx}\,dx$ av $u(x,t)$, og løs denne ligningen.

b) Anta i tillegg initialbetingelsen

$$u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$

der f er en gitt kontinuerlig, integrerbar funksjon. Vis at $u(x,t)$ kan skrives på formen

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y,t)\,dy, \qquad (t > 0)$$

og finn $g(y,t)$ eksplisitt. Det oppgis at $\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$ $(a > 0$ konstant).
(Fasit: $g(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t} e^{-x^2/(4t^2)}$.)

4 Bruk Laplacetransformasjon (med hensyn på t) til å finne $w(x,t)$ når

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} = t, \qquad w(x,0) = 0 \text{ for } x \geq 0, \qquad w(0,t) = 0 \text{ for } t \geq 0.$$

(Husk at den lineære differensialligningen $dy/dx + ay = b$ der a og b er konstanter og $a \neq 0$ har løsning $y = Ce^{-ax} + b/a$.
(Fasit: $w(x,t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}(t-x)^2 u(t-x)$.)