



EKSAMEN TMA4130 MATEMATIKK 4N, AUG. 2004

Oppgave 1

a) Bestem

$$\mathcal{L}(t \sin t), \quad \mathcal{L}(t \cos t) \quad \text{og} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(1+s^2)^2}\right).$$

b) Finn ved hjelp av Laplacetransformasjonen de løsninger av differensialligningen

$$tx'' - 2x' + tx = 0$$

som tilfredstiller $x(0) = 0$.

Oppgave 2 Fouriertransformen av funksjonen $f(x) = e^{-2|x|}$ defineres som vanlig:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} e^{-i\omega x} dx.$$

Beregn $\hat{f}(0)$ og $\hat{f}(1)$.

Oppgave 3 Temperaturen $u = u(x, t)$ i en *totalt* isolert tråd tilfredstiller

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < \pi, t > 0) \\ u_x(0, t) = 0 = u_x(\pi, t) & (t > 0) \end{cases}.$$

Finn først alle løsninger av formen $u(x, t) = X(x)T(t)$. Bestem løsningen som har initialtemperaturen

$$u(x, 0) = 2 + \cos(x) + 7 \cos(5x).$$

(Benytt superposisjonsprinsippet!)

Oppgave 4

a) Sett opp dividerte differansetabeller for datasettene:

i)	k	0	1	2	3
	x_k	0	1	4	6
	$f(x_k)$	1	-1	1	-1

ii)	k	0	1	2	3
	x_k	4	1	6	0
	$f(x_k)$	1	-1	-1	1

b) Bruk resultatene fra a) til å lage to interpolasjonspolynom $p_1(x)$ og $p_2(x)$, og vis at polynomene er identiske.

Oppgave 5 Vi skal løse diffusjonsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

for $0 \leq x \leq 1$ og $t \geq 0$. Randbetingelsene er

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

og startverdi

$$u(x, 0) = \cos(\pi(x - \frac{1}{2})), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

a) La $h = 0.1$ og $k = 0.04$. Formuler forlengs Euler for dette problemet.

b) Ved å bruke algoritmen i a) fikk vi denne tabellen:

t	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
k	0.9133	0.9603	x	0.8981	0.7769
$2k$	0.8771	y	0.8771	0.7769	0.5645
$3k$	0.8423	z	0.8423	0.7165	0.5206

Finn x , y og z .

Oppgave 6 La $x_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = 1$ og $z_0 = \frac{3}{4}$, og gjør én iterasjon med Gauss–Seidel på ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ -x + 4y - z &= 3 \\ -y + 4z &= 2 \end{aligned}$$