SIF5016 Matematikk 4N
Fredag 21. desember 2001
løsningsforslag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Instituttt for matematiske fag

Oppgavesettet har 12 punkter, 1abc, 2ab, 3ab, 4, 5ab, 6ab, som teller likt ved bedømmelsen.

$\boxed{1}$ **a)** Vi kan finne $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ved å bruke integralregelen 2 ganger:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s(s+3)}\right\} = 9\int_0^t e^{-3\tau}\,d\tau = -3\left(e^{-3t}-1\right)$$

$$\Longrightarrow \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s^2(s+3)}\right\} = \int_0^t 3\left(1-e^{-3\tau}\right)\,d\tau = 3t + e^{-3t} - 1$$

Eller, vi kan bruke delbrøkoppspalting: $\dfrac{9}{s^2(s+3)} = \dfrac{3}{s^2} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+3}$.

For å finne $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$, bruker vi skiftteorem 2:

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-2s}\right\} = f(t-2)u(t-2) \\ &= \left[3(t-2) + e^{-3(t-2)} - 1\right]u(t-2) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 2 \\ 3t + e^{-3(t-2)} - 7 & \text{for } t > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

b) Vi regner først ut $R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\}$:

$$r(t) = 9 - 9u(t-2) \Rightarrow R(s) = \frac{9}{s} - \frac{9e^{-2s}}{s}, \quad \text{eller:} \quad R(s) = \int_0^2 9e^{-st}\,dt = \frac{9}{s} - \frac{9e^{-2s}}{s}$$

Vi Laplacetransformerer så initialverdiproblemet og bestemmer $Y = \mathcal{L}\{y\}$:

$$s^2Y - s\cdot 1 - (-3) + 3\left(sY - 1\right) = \frac{9}{s} - \frac{9e^{-2s}}{s}, \qquad s(s+3)Y = s + \frac{9}{s} - \frac{9e^{-2s}}{s}$$

$$Y = \frac{1}{s+3} + \frac{9}{s^2(s+3)} - \frac{9e^{-2s}}{s^2(s+3)} = \frac{1}{s+3} + F(s) - G(s)$$

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-3t} + f(t) - g(t) \\ &= e^{-3t} + \left(3t + e^{-3t} - 1\right) - \left[3(t-2) + e^{-3(t-2)} - 1\right]u(t-2) \\ &= \begin{cases} 2e^{-3t} + 3t - 1 & \text{for } 0 < t < 2 \\ 2e^{-3t} - e^{-3(t-2)} + 6 & \text{for } t > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

c) Ved å Laplacetransformere differensialligningssystemet får vi

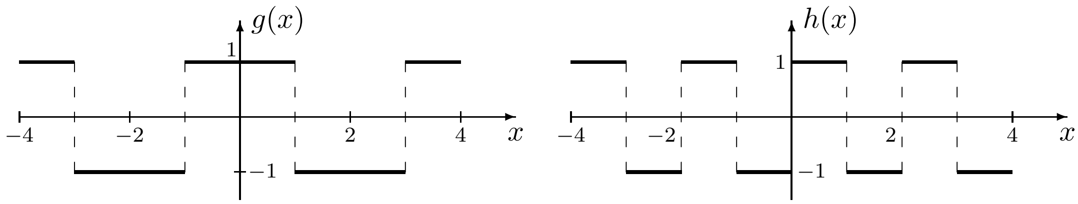
$$\begin{aligned} sY_1 + Y_2 &= \frac{e^{-\pi s}}{s} \\ Y_1 - sY_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{som gir} \quad \begin{aligned} &Y_1 = sY_2 = s\left[\frac{e^{-\pi s}}{s} - sY_1\right], \quad Y_1 = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} \\ &Y_2 = \frac{1}{s}Y_1 = \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t \quad \Longrightarrow \quad y_1 = \mathcal{L}^{-1}(Y_1) = \sin(t-\pi)\,u(t-\pi) = -\sin t\,u(t-\pi)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin\tau\,d\tau = 1-\cos t \quad \Longrightarrow$$

$$y_2 = \mathcal{L}^{-1}(Y_2) = [1-\cos(t-\pi)]\,u(t-\pi) = [1+\cos t]\,u(t-\pi)$$

$\boxed{2}$ **a)** Grafen til den jevne, henholdsvis odde, 4-periodiske utvidelsen av f:



Vi søker cosinusrekka $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L)$. Her er $L = 2$ og Eulerformlene for koeffisientene gir

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 dx + \int_1^2 (-1)\,dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Når n er partall, $n = 2m$, er $\sin n\pi/2 = \sin m\pi = 0$. Når n er oddetall, $n = 2m+1$, blir $\sin n\pi/2 = \sin(m\pi + \pi/2) = \cos m\pi = (-1)^m$. Cosinusrekka blir dermed

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2}\,.$$

b) Vi setter $x = 1/2$ i sinusrekka til f, og bruker at $\sin(2n+1)\pi/2 = (-1)^n$. Siden f er kontinuerlig for $x = 1/2$, og $f(1/2) = 1$, får vi

$$f(1/2) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi/2}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}f(1/2) = \frac{\pi}{4}.$$

Sinusrekka $(*)$ er Fourierrekka til h. Siden h er kontinuerlig for $x = \pi$, er

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2+1)\pi^2}{2n+1} = h(\pi) = -1.$$

$\boxed{3}$ **a)** Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i den gitte ligningen og separerer variable:

$$F''G = FG'' - 2FG\,, \qquad \frac{F''}{F} = \frac{G''}{G} - 2 = k \text{ (konstant)}, \qquad \begin{aligned} &F'' - kF = 0 \\ &G'' - (k+2)G = 0 \end{aligned}$$

Randbetingelsene medfører $F(0) = F(\pi) = 0$ og, som i Kreyszig 11.3, får vi løsninger $F(x) \not\equiv 0$ når $k = -n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Da blir $F_n(x) = \sin nx$. Ligningen for $G(t)$ blir

$$G'' + (n^2-2)G = 0 \quad \text{med løsning} \quad \begin{aligned} &G_1(t) = A_1 e^t + B_1 e^{-t} \quad \text{for } n = 1 \\ &G_n(t) = A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t \quad \text{for } n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

der $\omega_n = \sqrt{n^2-2}$ og A_n, B_n er vilkårlige konstanter. (Løsningen for $G_1(t)$ kan også skrives $G_1(t) = A_1^* \cosh t + B_1^* \sinh t$.) For $u(x,t) = F(x)G(t)$ blir svaret

$$u_1(x,t) = F_1(x)G_1(t) = \left(A_1 e^t + B_1 e^{-t}\right)\sin x$$
$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = \left(A_n \cos\sqrt{n^2-2}\,t + B_n \sin\sqrt{n^2-2}\,t\right)\sin nx, \quad n = 2,3,\ldots$$

b) Siden den gitte ligningen er lineær og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ også en løsning, og den oppfyller randbetingelsene. Vi setter følgelig

$$u(x,t) = \left(A_1 e^t + B_1 e^{-t}\right)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(A_n \cos\sqrt{n^2-2}\,t + B_n \sin\sqrt{n^2-2}\,t\right)\sin nx$$

og bestemmer koeffisientene A_n og B_n for $n = 1,2,3,\ldots$ slik at initialbetingelsene blir oppfylt.

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4} = u(x,0) = (A_1 + B_1)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin nx$$

(2) $$0 = u_t(x,0) = (A_1 - B_1)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} B_n\sqrt{n^2-2}\,\sin nx$$

Av (1) får vi $A_1 + B_1 = 1$ og $A_n = 1/n^4$ for $n \geq 2$. Av (2) får vi $A_1 - B_1 = 0$ og $B_n = 0$ for $n \geq 2$. Det gir $A_1 = B_1 = 1/2$ og, siden $\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh t$,

$$u(x,t) = \cosh t \sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cos\sqrt{n^2-2}\,t\sin nx.$$

$\boxed{4}$ Integralligningen kan skrives $f(x) * e^{-bx^2} = e^{-x^2}$. Vi Fouriertransformerer ved å bruke konvolusjonsregelen og den oppgitte Fouriertransformerte, og finner $\widehat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(x)\}$:

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(w)\cdot\frac{1}{\sqrt{2b}}\,e^{-w^2/4b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-w^2/4}$$
$$\widehat{f}(w) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-w^2/4-(-w^2/4b)} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-w^2/4\beta} = \frac{\sqrt{b}\,\sqrt{2\beta}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\,e^{-w^2/4\beta}$$

der $1/4\beta = 1/4 - 1/4b$, dvs. $\beta = b/(b-1)$. Ved igjen å bruke den oppgitte Fouriertransformerte får vi

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(w)\} = \frac{\sqrt{b}\,\sqrt{2\beta}}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\beta x^2} = \frac{b}{\sqrt{\pi(b-1)}}\,e^{-bx^2/(b-1)}.$$

$\boxed{5}$ **a)** Vi skal finne en approksimasjon til integralet

(1) $$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\pi.$$

Integrasjonspolynomet på Lagrangeform for $f(x)$ med nodene x_0, x_1, x_2 er:

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\cdot f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\cdot f(x_2)$$

og dermed for datasettet

x_i	-0.8660	0	0.8660
$f(x_i)$	0.5714	1	0.5714

har vi $p_2(x) = -0.5715x^2 + 1$.

Newtons endelige differenstabell er:

$$\begin{array}{r|lll} -0.8660 & 0.5714 & & \\ & & 0.4949 & \\ 0 & 1 & & 0.5715 \\ & & -0.4949 & \\ 0.8660 & 0.5714 & & \end{array}$$

og polynomet på Newtonform er:

$$p_2(x) = 0.5714 + (x + 0.8660)0.4949 - (x + 0.8660)x0.5715 = -0.5715x^2 + 1.$$

Ved å beregne integralet av $p_2(x)$ eksakt får vi

$$J = \int_{-1}^{1} p_2(x)dx = 1.6190,$$

og feilen er $|\pi/2 - I| = 0.0482$.

b) Ved å bruke Simpsons metode med nodene -1, 0, 1 får vi

$$S_2 = \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{3} \approx 1.6667,$$

og feilen er $|\pi/2 - S_2| \approx 0.0959$.

Selv om vi bruker det samme antallet noder som i a), får vi en større feil. Grunnen er at Simpsons metode bruker ekvidistante noder. Det finnes distribusjoner av noder i integrasjon intervallet som fører til bedre approksimasjoner til integralet enn ved bruk av ekvidistante noder.

Feilformelen for den sammensatte Simpsonregelen for integralet $\int_a^b f(x)\,dx$, for $n = 2m$ intervaller med $h = \frac{b-a}{2m}$, er

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx - S_{2m} = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a, b).$$

For generell h (og m) får vi følgende skranke

$$\left| -\frac{(1-(-1))}{180}h^4 f^{(4)}(\eta) \right| \leq \frac{1}{90}h^4 25.$$

Dersom vi setter

$$\frac{25}{90}h^4 \leq 0.05,$$

finner vi at $h \leq 0.6514$, og følgelig $m = 2$.

$\boxed{6}$ **a)** Vi bruker iterasjonen $M\mathbf{x}^{(n+1)} = N\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b}$ hvor $M - N = A$ og M er den nedre triangulære delen til A. Vi får

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(n)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Med $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ får vi $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix}-0.5 & -0.75 & 1.75\end{bmatrix}^\top$ og $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix}-0.8750 & -0.0625 & 1.0625\end{bmatrix}^\top$.

b) På systemet

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

er det umulig å bruke Gauss-Seidel metoden fordi den nedre triangulære delen til A ikke er invertbar. Hvis vi for exempel tar

$$M = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

har vi $A = M - N$ og M invertbar. Vi kan løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved å bruke iterasjonen $\mathbf{x}^{(n+1)} = M^{-1}(N\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b})$, og hvis $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ blir $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix}-0.5 & -0.75 & 1.75\end{bmatrix}^\top$.