



EKSAMEN I SIF5016 MATEMATIKK 4N

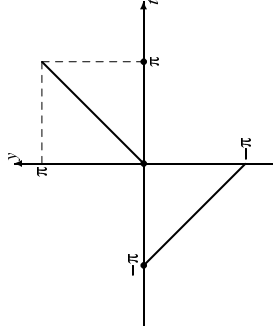
Bokmål
Lørdag 11. desember 1999
Kl. 9–14

Hjelpemidler: Rottman: *Matematisk formelsamling*
Typegodkjent kalkulator med tomt minne
Formler i Numerikk

Sensuren faller i uke 3.

Oppgave 1

- a) Finn Fourierrekka til en 2π -periodisk funksjon $f(t)$ når grafen til f for $-\pi \leq t \leq \pi$ er:



- b) Hva er summen av Fourierrekka til funksjonen $f(t)$ i a) for $t = 0$ og for $t = \pi$?
Finn en formel for summen av Fourierrekka på intervallet $\pi < t < 2\pi$.

Oppgave 2

- a) Løs initialverdi problemet

$$y'' + 3y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

der

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t < 1 \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

- b) Løs integralligningen

$$y(t) = \cos t + \int_0^t y(u) \cos(t-u) du, \quad t \geq 0.$$

Oppgave 3

Gitt den partielle differensialligningen

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0.$$

- a) Finn alle løsninger av $(*)$ på formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som oppfyller betingelsen
- $$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0.$$

- b) Finn en løsning av $(*)$ som tilfredsstiller (1) og initialbetingelsene

$$(2) \quad u(x, 0) = 1 + 2\cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos 2x.$$

Oppgave 4

Finn potensrekkeløsningen $y(x)$ av ligningen

$$(x^2 - 1)y'' + 8xy' + 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

For hvilke verdier av x er vi garantert at løsningen konvergerer?

Oppgave 5 Finn interpolasjonspolynommet til datasettet

$$\frac{x_k}{f(x_k)} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Oppgave 6 Formuler Newtons metode for systemet

$$\begin{aligned} x^2 + xy^3 - 9 &= 0, \\ 3x^2y - y^3 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Bruk startverdiene $x_0 = 1, 2, y_0 = 2, 5$ og utfør to iterasjoner.

Oppgave 7 Vi skal løse diffusjonsligningen

$$u_t = u_{xx}, \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{og} \quad t \geq 0.$$

Startverdiene er

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

og randbetingelsene

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

a) La $h = k = 0, 25$ og formuler Crank-Nicolsons metode for dette problemet.

Sett opp det lineære ligningssystemet som bestemmer de numeriske tilnærmelsene $u_i^1 \approx u(0, 25, 0, 25)$, $u_i^2 \approx u(0, 5, 0, 25)$ og $u_i^3 \approx u(0, 75, 0, 25)$.

Hint: Bruk $u_i(x, t) \approx (u(x, t) - u(x, t - k))/k$ og $u_{xx}(x, t) \approx (u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t))/h^2$.

b) Ligningssystemet fra **a)** skal løses i MATLAB. For å gjøre det, fullfør MATLAB-kommandoene i følgende sekvens:

```
>> A =
>> b =
>> u =
```

(Har du ikke klart punkt **a**), velg et vilkårlig lineært system av 3 ligninger og 3 ukjente.)