Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Krogstad 73 59 35 36
Syvert Nørsett 73 59 35 45

EKSAMEN I FAG SIF5013/14 MATEMATIKK 4N

Onsdag 19. mai 1999
Tid: 0900-1400

Tillatte hjelpemidler: B2
- Typegodkjent lommekalkulator, med tomt minne.
- Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*
- Formelliste vedlagt dette eksamensettet.

Oppgave 1

a) La $f(x) = L - x$ for $0 \le x \le L$. Skisser de like (f_e) og odde (f_o) utvidelsene av f (med periode $2L$) på intervallet $[-2L, 2L]$, og vis at fourierrekka til f_e er

$$\frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,..} \frac{\cos(\pi n x/L)}{n^2}.$$

b) Finn summen av

$$1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} - \cdots.$$

c) Finn alle løsningene $u(x,t) = X(x)T(t)$ av ligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

for $0 \le x \le 2,\ t > 0$, der $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(2,t) = 0$.

d) Bestem løsningene av problemet i (c) når

(i) $u(x,0) = 4 + 2\cos\frac{3\pi x}{2},\ 0 \le x \le 2,$
(ii) $u(x,0) = 2 - x,\ 0 \le x \le 2.$

Oppgave 2

a) Løs ligningen $f(t) + \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau)d\tau = t$ ved hjelp av laplacetransformen.

b) Finn laplacetransformen til

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le 2\pi \\ 0, & 2\pi < t. \end{cases}$$

c) Løs ligningen

$$\frac{dy}{dt} + 2y = f(t)$$

ved hjelp av laplacetransformen når $y(0) = 1$, og $f(t)$ er funksjonen i (b).

Oppgave 3

a) Finn fouriertransformen til

$$f(t) = \cos(t)e^{-t^2}.$$

b) Bestem transferfunksjonene til de lineære filtrene

(i) $f(t) \longrightarrow g(t) = \frac{f(t-1)+f(t+1)}{2},$
(ii) $f(t) \rightarrow g(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-\tau|} f(\tau)d\tau.$

c) Vis at ingen av filtrene i (b) øker energien på signalene som sendes gjennom filteret.

(For oppgave 3 oppgis at $\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$.)

Oppgave 4

a) Sett opp dividert differensetabeller for datasettene:

i)

k	0	1	2	3
x_k	0	1	4	6
$f(x_k)$	1	-1	1	-1

ii)

k	0	1	2	3
x_k	4	1	6	0
$f(x_k)$	1	-1	-1	1

b) Bruk resultatene fra a) til å lage to interpolasjonspolynom $p_1(x)$ og $p_2(x)$, og vis at polynomene er identiske.

Oppgave 5

Vi skal løse diffusjonsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

for $0 \le x \le 1$ og $t \ge 0$.

Randbetingelsene er

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

med startverdi

$$u(x,0) = \cos(\pi(x - \frac{1}{2})), \quad 0 \le x \le 1.$$

a) La $h = 0.1$ og $k = 0.04$, og formuler forlengs Euler for dette problemet.

b) Ved å bruke algoritmen i a) fikk vi denne tabellen

t	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
k	0.9133	0.9603	x	0.9133	0.7769
$2k$	0.8771	y	0.8771	0.7769	0.5645
$3k$	0.8423	z	0.8423	0.7165	0.0.5206

Finn x, y og z.