Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68
Anne Kværnø tlf. 73 59 35 42

EKSAMEN I SIF5013 MATEMATIKK 4N

Torsdag 3. august 2000
Kl. 9–14

Hjelpemidler – B2:
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste
Rottman: *Matematisk formelsamling*
Vedlegg: Formelark

Sensuren faller i uke 36.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.

Oppgave 1

a) Funksjonen $f(t)$ har Laplacetransformert

$$F(s) = \frac{e^{-as}}{(s-1)(s-2)(s-3)}, \qquad a \text{ konstant.}$$

Finn $f(t)$.

b) Bruk Laplacetransformasjonen til å løse differensialligningen

$$y'' - 5y' + 6y = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

der

$$g(t) = \begin{cases} 4e^t & \text{for } t < 2, \\ 0 & \text{for } t > 2. \end{cases}$$

Oppgave 2

a) Bestem konvolusjonen

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \cos\tau \cdot 2\cos^2(t-\tau)\,d\tau\,, \quad t \geq 0,$$

ved direkte utregning eller som en invers Laplacetransformert.

b) La a og b være positive konstanter. Bestem konvolusjonen

$$g_1(x) * g_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+p^2} \cdot \frac{1}{b^2+(x-p)^2}\,dp$$

ved først å finne den Fouriertransformerte av $g_1(x) * g_2(x)$ ved hjelp av tabell.

Oppgave 3

a) Den 2π-periodiske funksjonen $f(x)$ er for $-\pi < x \leq \pi$ gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\pi < x \leq 0, \\ \pi - x & \text{for } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Finn Fourierrekka til funksjonen.

b) Skisser summen av Fourierrekka under **a)** for $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

Finn summen av rekkene

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \qquad \text{og} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

Oppgave 4

Gitt den partielle differensialligningen

$$(*) \qquad u_{xx} = u_{tt} - 4u \qquad 0 \leq x \leq \pi,\ t > 0.$$

a) Finn alle løsninger av $(*)$ på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller randbetingelsene

$$(1) \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0.$$

b) Finn en løsning av $(*)$ som tilfredsstiller (1) og initialbetingelsene

$$(2) \qquad u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x, \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

Oppgave 5
Gitt et tredje ordens startverdiproblem

$$y''' - 3y'' + 6y' - 6y = 0,$$

$$y(1) = 2, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = -4.$$

Skriv om differensialligningen til et første ordens system. Hva blir startbetingelsene for dette første ordens systemet? Utfør et steg av Heuns metode med steglengden $h = 0.1$.

(**Hint:** Klarer du ikke å skrive om startverdiproblemet, så bruk Heuns metode på følgende system i stedet:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3, & y_1(0) &= 1 \\ y_2' &= y_4, & y_2(0) &= 0 \\ y_3' &= -5y_1 + 2y_2, & y_3(0) &= -1 \\ y_4' &= 2y_1 - 2y_2, & y_4(0) &= 0 \end{aligned}$$

)

Oppgave 6
Utfør en iterasjon med Newtons metode på systemet

$$\begin{aligned} x + 13\ln(x) - y^2 &= 0 \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Bruk startverdiene $x_0 = 5.0$, $y_0 = 5.0$.

Oppgave 7
Gitt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ -2x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & -1. \end{array}$$

Utfør en Gauss-Seidel iterasjon på systemet. Bruk $x_i^{(0)} = 1.5$, $i = 1, 2, 3$ som startverdier.