Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Knudsen tlf. 73 59 34 68
Elena Celledoni tlf. 73 59 35 44
Yurii Lyubarskii tlf. 73 59 35 26

EKSAMEN I SIF5016 MATEMATIKK 4N

Bokmål
Fredag 21. desember 2001
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*
Vedlegg: Formelark i numerikk

Sensuren faller 28. januar.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

a) Finn invers Laplacetransformert for funksjonene

$$F(s) = \frac{9}{s^2(s+3)} \qquad \text{og} \qquad G(s) = \frac{9e^{-2s}}{s^2(s+3)}.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y''(t) + 3y'(t) = r(t) \quad \text{for } t > 0$$

med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = -3$, når $r(t) = 9$ for $0 < t < 2$ og $r(t) = 0$ for $t > 2$.

c) Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' + y_2 &= u(t-\pi) \\ y_1 - y_2' &= 0 \end{aligned} \qquad \text{for } t > 0$$

når initialbetingelsene er $y_1(0) = y_2(0) = 0$ og $u(t-\pi)$ er Heavisidefunksjonen gitt ved

$$u(t-\pi) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < \pi \\ 1 & \text{for } t > \pi. \end{cases}$$

Oppgave 2

Funksjonen f er gitt på intervallet $0 < x < 2$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < x \le 1 \\ -1 & \text{for } 1 < x < 2. \end{cases}$$

La g være den like (jevne), periodiske utvidelsen av f med periode 4, og la h være den odde, periodiske utvidelsen av f med periode 4.

a) Skisser grafene til g og h på intervallet $-4 < x < 4$, og beregn (Fourier-)cosinusrekka til f.

b) Det oppgis at (Fourier-)sinusrekka til f er

$$(*) \qquad \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{2n+1}.$$

Bruk $(*)$ til å finne summen av rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Hva er summen av rekka $(*)$ for $x = \pi$?

Oppgave 3

a) Funksjonen $u(x,t)$ tilfredsstiller ligningen

$$u_{xx} = u_{tt} - 2u \qquad \text{for } 0 < x < \pi,\ t > 0$$

og randbetingelsene

$$u(0,t) = 0 \quad \text{og} \quad u(\pi,t) = 0 \quad \text{for } t \ge 0.$$

Finn alle funksjoner på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller disse kravene.

b) Finn en rekkeutvikling for en funksjon $u(x,t)$ som tilfredsstiller kravene under a), og dessuten initialbetingelsene

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{og} \quad u_t(x,0) = 0 \quad \text{for } 0 < x < \pi.$$

Her er $f(x)$ en funksjon med rekkeutvikling $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$.

Oppgave 4

Det oppgis at den Fouriertransformerte av e^{-ax^2} er $\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$ (a er en positiv konstant).

Bruk Fouriertransformasjonen til å løse integralligningen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{-b(x-p)^2}\, dp = e^{-x^2} \qquad \text{der } b > 1.$$

Oppgave 5 La $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, og la $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{\pi}{2}$.

a) Gitt nodene $x_0 = -0.8660$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.8660$. Finn interpolasjonspolynomet $p_2(x)$ til datasettet $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ (bruk den metoden du vil).

Finn tilnærmelsen J til integralet I

$$J = \int_{-1}^{1} p_2(x)dx,$$

og beregn feilen $|I - J|$.

I det neste punktet skal vi bruke Simpsons metode S_{2m} på $2m$ intervall til å approksimere integralet $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ fra punkt a).

b) Beregn S_{2m} for $m = 1$, og feilen $|I - S_2|$.

Kan du tenke deg en grunn til at metoden i punkt a) er bedre enn Simpsons metode med like mange noder?

Bruk feilformelen for Simpsons metode og finn hvor mange intervall $2m$ man må bruke i approksimasjonen av $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ for at feilen skal bli mindre enn feilen i punkt a)(≈ 0.05). (En kan anta at $|f^{(4)}(x)| \leq 25$.)

Oppgave 6

a) Approksimer løsningen til det lineære systemet

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ved å bruke Gauss-Seidels metode og $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$. Utfør 2 iterasjoner.

b) På systemet

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

er det umulig å bruke Gauss-Seidels metode. Forklar hvorfor.

En måte å løse det på med en iterativ metode er ved å skrive $A = M - N$, som gir $M\mathbf{x}^{(n+1)} = N\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b}$. Hva må kreves av M? Gjør et fornuftig valg av M og utfør én iterasjon.