Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Elise Klaveness tlf. 73 55 02 39

EKSAMEN I SIF5013/16 MATEMATIKK 4N OG SIF5017 MATEMATIKK 4D

Torsdag 2. august 2001
Kl. 9–14

Hjelpemidler – B2:
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste
Rottman: *Matematisk formelsamling*
Vedlegg: Formelark

Sensurfrist: 1. september

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.

Oppgave 1

a) Finn den Laplacetransformerte $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ og den inverse Laplacetransformerte $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ for funksjonene

$$f(t) = \sin t + t\cos t \qquad \text{og} \qquad G(s) = \frac{s}{s^2+1}\left[1 - e^{-2\pi s}\right].$$

b) Finn $y(t)$ for $t > 0$ ved hjelp av Laplacetransformasjon når

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau = r(t), \qquad y(0) = 0, \qquad r(t) = \begin{cases} 2\cos t & \text{for } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{for } t > 2\pi. \end{cases}$$

c) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 4y' + 8y = 2\delta(t-2\pi), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

der $\delta(t-2\pi)$ er Diracs deltafunksjon.

Oppgave 2
Gitt

(i) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi$$

(ii) $$u(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

a) Avgjør (ved innsetting) hvilke(n) av følgende funksjoner

$$u(x,y) = y, \qquad u(x,y) = \sin nx \sinh ny$$
$$u(x,y) = xy, \qquad u(x,y) = \cos nx \sinh ny \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

som oppfyller (i), (ii) og

(iii) $$u_x(0,y) = 0, \qquad u_x(\pi,y) = 0 \qquad \text{for } 0 < y < \pi.$$

Finn en funksjon $u(x,y)$ som oppfyller (i), (ii), (iii) og

(iv) $$u(x,\pi) = 1 - \cos 2x\,, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

b) Finn alle funksjoner på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ som oppfyller (i), (ii) og

(v) $$u(0,y) = 0, \qquad u_x(\pi,y) = 0 \qquad \text{for } 0 < y < \pi.$$

Oppgave 3
Det oppgis at funksjonen $f(x) = \sin^2 x$ for $0 \le x \le \pi$ har Fouriersinusrekke

$(*)$ $$-\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}.$$

Skisser grafen til summen av rekka $(*)$ for $-2\pi \le x \le 2\pi$. Bruk $(*)$ til å finne summen av rekka

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}.$$

Oppgave 4
Bruk Fouriertransformasjon til å finne $f(x)$ når

$$f(x) = e^{-|x|} - 4\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-|x-p|}\,dp.$$

Oppgitt Fouriertransformert: $\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+w^2} \qquad (a > 0)$

Oppgave 5
Vi skal se på numeriske løsninger av den ordinære differensialligningen

$$x' = f(x,t) = -2x + 8t + 4, \quad x(0) = 1.$$

Den eksakte løsningen er $x(t) = e^{-2t} + 4t$.

a) Beregn numeriske tilnærmelser til $x(0.1)$ og $x(0.2)$ ved Eulers metode. Velg $h = 0.1$.

b) Beregn en numerisk tilnærmelse til $x(0.1)$ ved Heuns metode. Velg $h = 0.1$.
Sammenlign de numeriske løsningene av de to metodene med den eksakte løsningen for $x(0.1)$. Hvilken metode gir best tilnærmelse?

Oppgave 6

a) For å approksimere integralet

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx$$

kan man bruke trapesmetoden

$$T_n = \frac{h}{2} f(0) + h \sum_{i=1}^{n-1} f(\frac{i}{n}) + \frac{h}{2} f(1)$$

eller midtpunktmetoden

$$U_n = h \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i-1/2}{n})$$

I begge tilfeller er $h = \frac{1}{n}$.
Vis formelen $T_{2n} = \frac{1}{2}(T_n + U_n)$.

b) For et spesielt valg av $f(x)$ har vi oppgitt tabellen

n	1	2	4	8	16	32
U_n	0.707106	0.587937	0.522431	0.509019	0.505881	0.505110

og dessuten at $f(0) = f(1) = 0$.
Bruk dette, samt resultatet fra **a)** til å bestemme T_{64}.
Vi oppgir nå at eksakt svar er $I = 0.5048545\ldots$.
Beregn størrelsen

$$S = T_{64} + \frac{T_{64} - T_{32}}{3}$$

og sammenlign med det eksakte svaret. Forklar hvorfor $|S - I|$ er mindre enn $|T_{64} - I|$, dvs at S er en bedre tilnærmelse enn T_{64}.