Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68
Elena Celledoni tlf. 73 59 35 44

EKSAMEN I SIF5013 MATEMATIKK 4N

Bokmål
Onsdag 16. mai 2001
Kl. 9–14

Hjelpemidler – B2:
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste
Rottman: *Matematisk formelsamling*
Vedlegg: Formelark

Sensuren faller i uke 23.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.

Oppgave 1
For strømmen $i(t)$ i en viss strømkrets gjelder

$$i'(t) + 4i(t) + 3\int_0^t i(\tau)\,d\tau = v(t), \qquad i(0) = 0,$$

der $v(t)$ er påtrykt spenning.

a) La $I(s)$ og $V(s)$ betegne de Laplacetransformerte av $i(t)$ og $v(t)$. Vis at

$$I(s) = \frac{s}{(s+1)(s+3)}V(s)$$

og finn $i(t)$ dersom $V(s) = 6/s$.

b) Finn $i(t)$ dersom

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 2, \\ e^{-2t} & \text{for } t > 2. \end{cases}$$

Oppgave 2
Finn funksjonen $f(t)$ for $t \ge 0$ dersom

$$\int_0^t f(\tau)\,e^{a(t-\tau)}\,d\tau = \sin t$$

og a er en vilkårlig konstant.

Oppgave 3
En odde 2π-periodisk funksjon $f(x)$ er for $0 \le x \le \pi$ gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{for } 0 \le x \le \pi/2, \\ 0 & \text{for } \pi/2 < x \le \pi. \end{cases}$$

Det blir oppgitt at for $n \ne 2$ er Fouriersinuskoeffisienten b_n til $f(x)$ gitt ved

$$b_n = -\frac{4}{\pi}\frac{\sin(n\pi/2)}{(n-2)(n+2)}, \qquad n \ne 2.$$

a) Skisser grafen til $f(x)$ på intervallet $-2\pi \le x \le 2\pi$.
Beregn koeffisienten b_2 og skriv opp Fourierrekka til $f(x)$.

b) Bruk Fourierrekka til $f(x)$ til å finne summen av rekkene

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2m+3)} \qquad \text{og} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2(2m+3)^2}.$$

Oppgave 4
Gitt randverdiproblemet

(i) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

(ii) $$u_x(0,y) = 0, \quad u_x(\pi,y) = 0, \quad u(x,0) = 0.$$

a) Vis at alle løsninger av (i) som er av formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ og som oppfyller (ii) er gitt ved

$$u_0(x,y) = A_0 y \qquad \text{og} \qquad u_n(x,y) = A_n \cos nx \sinh ny$$

der $n = 1, 2, 3, \ldots$ og $A_0, A_1, A_2, \ldots$ er vilkårlige konstanter.

b) Finn en løsning av (i) som oppfyller randbetingelsene (ii) og

(iii) $$u(x,\pi) = 1 - 2\cos 2x + \cos 4x.$$

Oppgave 5
Gitt den ordinære differensialligningen

$$x'' = x^2 e^t + x',$$

med initialverdier

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Det er oppgitt at $x(0.1) = 1.2165$.

a) Skriv denne andre ordens differensialligningen som et system av første ordens differensialligninger.

Finn to forskjellige approksimasjoner til $x(0.1)$ ved å beregne ett skritt av Eulers metode og forbedret Eulers metode (Heuns metode) på systemet, med skrittlengde $h = 0.1$.

b) Beregn lokal feil for de to approksimasjonene, finn en feilskranke av formen Ch^{p+1}, med C en konstant og p et heltall. Hvilken av de to metodene gir det beste svaret? Forklar hvorfor.

Oppgave 6
Den m-te roten av et tall R er en løsning av den ikke-lineære ligningen

(1) $$x^m - R = 0.$$

Vi antar $R > 0$ og $m \geq 2$.

a) Skriv ned en iterasjon for å approksimere $\sqrt[m]{R}$ ved bruk av Newtons metode på (1).

Betrakt fikspunktiterasjonen

(2) $$x_{n+1} = 1 - \frac{R}{x_n^m} + \frac{R}{x_n^{m-1}}$$

for å løse

(3) $$x = g(x), \quad \text{med} \quad g(x) = 1 - \frac{R}{x^m} + \frac{R}{x^{m-1}}.$$

Verifiser at $\sqrt[m]{R}$ er et fikspunkt for ligningen (3).

b) Beregn noen iterasjoner med Newtons metode og iterasjonen (2) for å finne $\sqrt[m]{R}$ med $m = 2$ og $R = 7/2$, og $x_0 = 2$. Sammenlign resultatene. Avslutt hver av iterasjonene når feilen er mindre enn 10^{-4}.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{n+1}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$f'(x) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + \frac{1}{2} h f''(\xi)$$
$$f'(x) = \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) - \frac{1}{2} h f''(\xi)$$
$$f''(x) = \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi)$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$\text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- En 2. ordens Runge-Kutta metode (Heun) for $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\mathbf{K}_1 = h\,\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$$
$$\mathbf{K}_2 = h\,\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1)$$
$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)$$

Se også formlene i Rottmann.